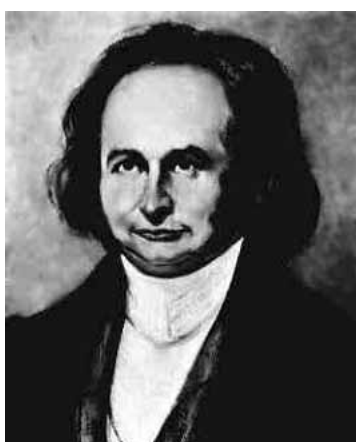


Elliptische Integrale und Funktionen nach JACOBI

Copyright © 2004–2015 Ralf Hoppe

Revision : 295



Inhaltsverzeichnis

1	Einleitung	4
2	Elliptische Integrale	5
2.1	Unvollständiges elliptisches Integral erster Art	6
2.1.1	Definition	6
2.1.2	Spezielle Werte	8
2.1.3	Spezielle Module	9
2.1.4	Funktionsverlauf	9
2.1.5	Erste Ableitung	12
2.1.6	Zweite Ableitung	12
2.1.7	Imaginäre Argumente	12
2.2	Vollständiges elliptisches Integral erster Art	13
2.2.1	Definition	13

Inhaltsverzeichnis

2.2.2	Spezielle Werte	14
2.2.3	Funktionsverlauf	14
2.2.4	G -Form	14
3	Elliptische Funktionen	15
3.1	Definition	15
3.2	Spezielle Werte	16
3.3	Spezielle Module	17
3.4	Funktionsverlauf	18
3.5	Erste Ableitung	19
3.6	Zweite Ableitung	20
3.7	Additionstheoreme	20
3.8	Doppelte Argumente	25
3.9	Halbe Argumente	25
3.10	Imaginäre Argumente	26
3.11	Komplexe Argumente	28
3.12	Änderung des Arguments	32
4	Modultransformationen	34
4.1	Einführung	34
4.2	Problemstellung	34
4.3	Rationale Lösung	36
4.4	Elliptische Lösung	39
4.5	Die Transformationsfunktion	42
4.6	Transformationen erster Ordnung	46
4.6.1	Imaginäre Transformation	46
4.6.2	Reelle Transformation	47
4.7	Quadratische Transformationen	48
4.7.1	L -Transformation	49
4.7.2	G -Transformation	57
4.8	Erste elliptische Haupttransformation, n ungerade	61
4.8.1	Periodenbeziehungen	61
4.8.2	Funktionsverlauf	61
4.8.3	Rationale Lösungsfunktion	62
4.8.4	Nullstellen (Koeffizienten)	64
4.8.5	Polstellen	65
4.8.6	Extremwerte	66
4.8.7	Beziehungen für die elliptischen Funktionen	67
4.8.8	Der Multiplikator M	70
4.8.9	Das Modul λ	71
4.8.10	Das komplementäre Modul λ'	72
4.9	Erste elliptische Haupttransformation, n gerade	73
4.9.1	Funktionsverlauf	73
4.9.2	Rationale Lösungsfunktion	74

Abbildungsverzeichnis

4.9.3	Nullstellen (Koeffizienten), Pole und Extremwerte	75
4.9.4	Beziehungen für die elliptischen Funktionen	75
4.9.5	Das Modul λ	79
4.9.6	Der Multiplikator M	80
4.9.7	Das komplementäre Modul k'	83
4.10	Zweite elliptische Haupttransformation, n ungerade	83
4.10.1	Periodenbeziehungen	83
4.10.2	Funktionsverlauf	83
4.10.3	Rationale Lösungsfunktion	85
4.10.4	Nullstellen (Koeffizienten)	87
4.10.5	Polstellen	88
4.10.6	Extremwerte	88
4.10.7	Beziehung für sn	88
4.10.8	Der Multiplikator M	89
4.10.9	Das Modul λ'	89
4.11	Zweite elliptische Haupttransformation, n gerade	90
5	Numerische Berechnungen	92
5.1	Der AGM-Algorithmus	92
5.2	Vollständiges Elliptisches Integral	96
5.3	Unvollständiges Elliptisches Integral	97
5.4	Elliptischer Sinus	99
6	SOLOTAREFF'S drittes Problem	102

Abbildungsverzeichnis

1	$F(\varphi; k)$ für verschiedene Module k	10
2	$F(\varphi; k)$ im Intervall $0 \leq \varphi \leq 4\pi$	11
3	Funktionsverlauf des Integranden $(1 - k^2 \sin^2 \phi)^{-1/2}$	11
4	K, K' und K/K' als Funktion des Moduls k	14
5	Elliptische Basisfunktionen	18
6	Eine Periode des elliptischen Sinus' $\operatorname{sn}(\alpha + j\beta; k)$	29
7	Eine Periode der elliptischen Delta-Amplitude $\operatorname{dn}(\alpha + j\beta; k)$	29
8	Elliptischer Sinus $\operatorname{sn}[\operatorname{Re}(u) + j\operatorname{Im}(u); k]$ mit Parameterlinien	40
9	Gitter rein imaginärer/reeller Werte für y	41
10	Lösung der L -Transformation $y = f(x; k)$	52
11	L -Transformation in Parameterdarstellung	52
12	Modultransformation $\lambda = \frac{1 - k'}{1 + k'}$	53
13	Verlauf für x und y im Intervall $-K \leq u \leq K$	62
14	Verlauf von u in der komplexen Ebene ($n = 7$, ungerade)	63
15	Erste elliptische Haupttransformation für $n = 7$	64
16	Verlauf von u in der komplexen Ebene ($n = 6$, gerade)	73

Tabellenverzeichnis

17	Erste elliptische Haupttransformation für $n = 6$	74
18	Parameterdarstellung der 2. elliptischen Transformation ($n = 3$)	84
19	Zweite elliptische Haupttransformation ($n = 7$)	85
20	Zweite elliptische Haupttransformation für $n = 6$	91
21	Toleranzschema für $ f(x) $	103

Tabellenverzeichnis

1	Pole und Nullstellen der elliptischen Basisfunktionen	30
2	Elliptischer Sinus auf dem Gitter $\eta K + j\zeta K'$	32
3	Elliptische Funktionen bei Änderung des Arguments	33
4	Perioden der elliptischen Basisfunktionen [AS72, 16.2]	33
5	Funktionswerte x, y für $C = 0$	44
6	Funktionswerte x, y für $C = \Omega/2$	44

Algorithmenverzeichnis

1	Numerische Berechnung von $K(k)$ mittels AGM	97
2	Numerische Berechnung von $x = \text{sn}(u; k)$	101

Symbolverzeichnis

$E(\varphi; k)$	Unvollständiges ell. Integral zweiter Art (L	’sche Normalform)
$F(\varphi; k)$	Unvollständiges ell. Integral erster Art (L	’sche Normalform)
$F(x; k)$	Unvollständiges ell. Integral erster Art (J	-Form)
$gd(x)$	G	-Funktion ($gd x = \arctan(\sinh x)$)
$K(k)$	Vollständiges ell. Integral erster Art	
$\Pi(\varphi; k; n)$	Unvollständiges ell. Integral dritter Art (L	’sche Normalform)

1 Einleitung

Dieser Teil behandelt grundlegende Eigenschaften des vollständigen und unvollständigen elliptischen Integrals erster Art sowie der J ’schen elliptischen Funktionen. Leider ist die (für den Ingenieur zumutbare) deutschsprachige Literatur zu diesen Themen nicht unbedingt

2 Elliptische Integrale

zahlreich, so daß sich viele Quellenverweise auf ältere oder englischsprachige Werke beziehen.¹ Als Übersichten sind hier vor allem [WW27, Pil54] und natürlich [AS72] zu nennen, weitere Tafeln und ansprechende Abbildungen enthält z.B. [JE52]. Ausschließlich diesem speziellen Thema widmen sich [Ach70], [Tri48] und (nebst einer Einführung in die Funktionentheorie) auch [Hur00]. Weitere Details mit einer Unmenge von Formeln findet man unter anderem in [Cay76] und [Web91]. Alle diese Quellen befassen sich (in unterschiedlicher Tiefe) auch mit der Transformationstheorie der elliptischen Funktionen, in [Koe74] wird von doppelt-periodischen Funktionen im Allgemeinen ausgegangen. Nicht zu vergessen seien außerdem [Jac29] bzw. [BW91] sowie [Leg28], welche als Ursprungswerke anzusehen sind.

Alle im weiteren dargelegten Beweise stützen sich fast ausschließlich auf die bekannten Grundregeln der höheren Mathematik und sollten deshalb für Ingenieure technischer Fachrichtungen nachvollziehbar sein.²

2 Elliptische Integrale

Elliptische Integrale sind Integrale der Form $\int R(w, x)dx$, wobei R eine rationale Funktion von w und x , w^2 dagegen eine kubische oder biquadratische Funktion von x ist.³ Alle diese Parameterintegrale lassen sich auf drei Grundformen reduzieren, die man das Legendre'sche Normalintegral erster Art $F(\varphi; k)$, zweiter Art $E(\varphi; k)$ und dritter Art $\Pi(\varphi; k; n)$ nennt [AS72, 17.4.41 ff.], [Tri48, II, § 3], [Hur00, II-6, § 2].

$$\begin{aligned} F(\varphi; k) &= \int_0^\varphi \frac{d\phi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \phi}} \\ E(\varphi; k) &= \int_0^\varphi \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \phi} d\phi \\ \Pi(\varphi; k; n) &= \int_0^\varphi \frac{d\phi}{(1 + n \sin^2 \phi) \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \phi}} \end{aligned}$$

Der allen gemeinsame Parameter k wird Modul genannt. Außerdem ist mit

$$k' = \sqrt{1 - k^2} \tag{1}$$

¹Einige der zitierten Bücher sind dafür aber als Online-Ausgabe der Französischen Nationalbibliothek <http://gallica.bnf.fr> im Internet einsehbar.

²Insbesondere wurde auf die Einführung der Theta- sowie Weierstrass'schen Funktionen, welche von vielen Autoren gern zur eleganten Beweisführung verwendet werden, verzichtet (siehe z. B. in [Hur00] und [Ach70]).

³Diese Integrale haben ihren Namen wegen der Rolle, die sie bei der Berechnung von Ellipsengrößen (insbesondere der Bogenlänge) spielen.

2 Elliptische Integrale

ein komplementäres Modul definiert. Als hilfreich erweisen sich in vielen Fällen auch die binomischen Darstellungen des Moduls.

$$k^2 = (1 - k')(1 + k') \qquad k'^2 = (1 - k)(1 + k) \qquad (2)$$

2.1 Unvollständiges elliptisches Integral erster Art

2.1.1 Definition

LEGENDRE'sche Normalform Das unvollständige elliptische Integral erster Art ist in seiner Legendre'schen Form folgendermaßen definiert

$$F(\varphi; k) = \int_0^\varphi \frac{d\phi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \phi}}, \qquad (3)$$

wobei mit k das Modul und φ die Amplitude bezeichnet wird.

JACOBI-Form Mit der Substitution $t = \sin \phi$ in Gleichung 3 gelangt man zu der von C.G.J. Jacobi bevorzugten Form.

$$F(\varphi; k) = \int_0^x \frac{dt}{\sqrt{(1 - t^2)(1 - k^2 t^2)}}, \qquad x = \sin \varphi \qquad (4)$$

Beweis. Einsetzen der Substitution sowie der Ableitung $dt/d\phi = \cos \phi$ in Definitionsgleichung 3 führt sofort zum Ergebnis

$$\begin{aligned} F(\varphi; k) &= \int_{\phi=0}^\varphi \frac{dt}{\cos \phi \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \phi}} \\ &= \int_0^{\sin \varphi} \frac{dt}{\sqrt{(1 - t^2)(1 - k^2 t^2)}}. \end{aligned}$$

□

Um im weiteren die Eindeutigkeit zu gewährleisten und außerdem eine einfache Schreibweise des Integrals bei Verwendung des Argumentes x zu erhalten, soll außerdem definiert sein:

2 Elliptische Integrale

$$F_{\star}(x; k) = \int_0^x \frac{dt}{\sqrt{(1-t^2)(1-k^2t^2)}}. \quad (5)$$

RIEMANN'sche Normalform Eine weitere, heute nicht mehr so geläufige Form, ist die Riemann'sche Form. Sie kommt zustande, wenn man in der Jacobi'schen Darstellung nach Gleichung 5 den Term $t^2 = \xi$ substituiert. Mit dem zugehörigen Differential $d\xi = 2t dt$ ergibt sich so

$$F_{\star}(x; k) = \frac{1}{2} \int_0^{\sqrt{x}} \frac{d\xi}{\sqrt{\xi(1-\xi)(1-k^2\xi)}}$$

und letztlich (die nicht besonders gekennzeichnete) Riemann'sche Normalform des Integrals.

$$\int \frac{d\xi}{\sqrt{\xi(1-\xi)(1-k^2\xi)}}$$

GAUSS-Form Eine von C.F. Gauss intensiv verwendete Form des elliptischen Integrals erster Art⁴ ist

$$\int_0^w \frac{dt}{\sqrt{(t^2+a^2)(t^2+b^2)}} = \frac{1}{a} F(\varphi; k), \quad w = b \tan \varphi \quad (6)$$

mit dem Modul

$$k = \sqrt{1 - \left(\frac{b}{a}\right)^2} \quad (7)$$

sowie dem komplementären Modul (konform zu Definitionsgleichung 1)

$$k' = \sqrt{1 - k^2} = \frac{b}{a}. \quad (8)$$

Beweis. Um dieses Integral auf $F(\varphi; k)$ zurückzuführen, wird zuerst eine passende Substitution nach [AS72, 17.4.41 ff.] gewählt

$$\tan \phi = \frac{t}{b} \quad (9)$$

⁴Weitere Integrale dieser Art, die alle Vorzeichenkombinationen der Summanden abdecken, sind in [AS72, 17.4.41 ff.] zu finden.

2 Elliptische Integrale

und dann mit Hilfe von $(\tan \phi)' = 1 + \tan^2 \phi = \cos^{-2} \phi$ die Ableitung $dt/d\phi$ gebildet.

$$\frac{dt}{d\phi} = b(1 + \tan^2 \phi) = \frac{b}{\cos^2 \phi}$$

Einsetzen in das Ausgangsintegral ergibt

$$\begin{aligned} \int_0^w \frac{dt}{\sqrt{(t^2 + a^2)(t^2 + b^2)}} &= \int_0^\varphi \frac{d\phi}{\sqrt{a^2 \cos^2 \phi + b^2 \sin^2 \phi}} \\ &= \frac{1}{a} \int_0^\varphi \frac{d\phi}{\sqrt{1 - (1 - b^2/a^2) \sin^2 \phi}}. \end{aligned} \quad (10)$$

Vergleich mit Formel 3 zeigt, daß es sich hier um das unbestimmte elliptische Integral erster Art $a^{-1}F(\varphi; k)$ handelt.⁵ □

LEGENDRE'sche Normalform mit Modulwinkel Manchmal wird das elliptische Integral erster Art auch über den sogenannten Modulwinkel Θ , mit $k = \sin \Theta$, angegeben.⁶

$$F(\varphi; \Theta) = \int_0^\varphi \frac{d\phi}{\sqrt{1 - \sin^2 \Theta \sin^2 \phi}}$$

2.1.2 Spezielle Werte

Der Funktionswert für $\varphi = 0$ ist trivial und direkt aus Definitionsgleichung 3 ersichtlich.

$$F(0; k) = 0$$

Für $\varphi = \pi/2$ entartet die Funktion zum vollständigen elliptischen Integral erster Art $K(k)$, wobei k dann die Rolle des Arguments übernimmt (vgl. Abschnitt 2.2).

$$F\left(\frac{\pi}{2}; k\right) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\phi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \phi}} = K(k) \quad (11)$$

Der Funktionswert bei $\varphi = \pi$ ergibt sich auf dieser Grundlage zu $2K(k)$.

⁵Ein Vergleich mit Formel 5 führt zur Relation $w = bx(1 - x^2)^{-1/2}$.

⁶Diese Schreibweise ist in der elektrischen Filtertheorie recht verbreitet [Cau54], [Zve67].

2 Elliptische Integrale

Beweis.

$$\begin{aligned} F(\pi; k) &= \int_0^\pi \frac{d\phi}{\sqrt{1-k^2 \sin^2 \phi}} \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\phi}{\sqrt{1-k^2 \sin^2 \phi}} + \int_{\frac{\pi}{2}}^\pi \frac{d\phi}{\sqrt{1-k^2 \sin^2 \phi}} \\ &= K(k) - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\phi}{\sqrt{1-k^2 \sin^2(\phi+\pi)}} \\ &= 2K(k) \end{aligned}$$

□

2.1.3 Spezielle Module

Für spezielle Module sind geschlossene Lösungen des Integrals möglich.

$$F(\varphi; 0) = \int_0^\varphi d\phi = \varphi \quad (12)$$

$$F(\varphi; 1) = \int_0^\varphi \frac{d\phi}{\cos \phi} = \int_0^\varphi \sec \phi d\phi = \ln \left| \tan \left(\frac{\varphi}{2} + \frac{\pi}{4} \right) \right| \quad (13)$$

2.1.4 Funktionsverlauf

Zuerst sei auf Abbildung 1 verwiesen, die $F(\varphi; k)$ im Intervall $0 \leq \varphi \leq \pi/2$ darstellt. Relativ leicht nachzuweisen ist, daß $F(\varphi; k)$ eine ungerade Funktion ist.

Beweis. Mit der Substitution $-\phi = \psi$ in der Definitionsgleichung des Integrals kann man schnell beweisen, daß $F(-\varphi; k) = -F(\varphi; k)$ gilt.

$$F(-\varphi; k) = \int_{\phi=0}^{-\varphi} \frac{d\phi}{\sqrt{1-k^2 \sin^2 \phi}} = \int_{\psi=0}^{\varphi} \frac{-d\psi}{\sqrt{1-k^2 \sin^2 \psi}} = -F(\varphi; k)$$

□

$F(\varphi; k)$ ist für alle φ eine monoton steigende Funktion. Die Begründung liegt in Gleichung 16, der ersten Ableitung von $F(\varphi; k)$. Für kleine Werte k gilt $F(\varphi; k) \approx \frac{2}{\pi} \varphi K(k)$, was sich direkt aus Abbildung 1 ablesen läßt, wenn man außerdem Gleichung 11 berücksichtigt.

2 Elliptische Integrale

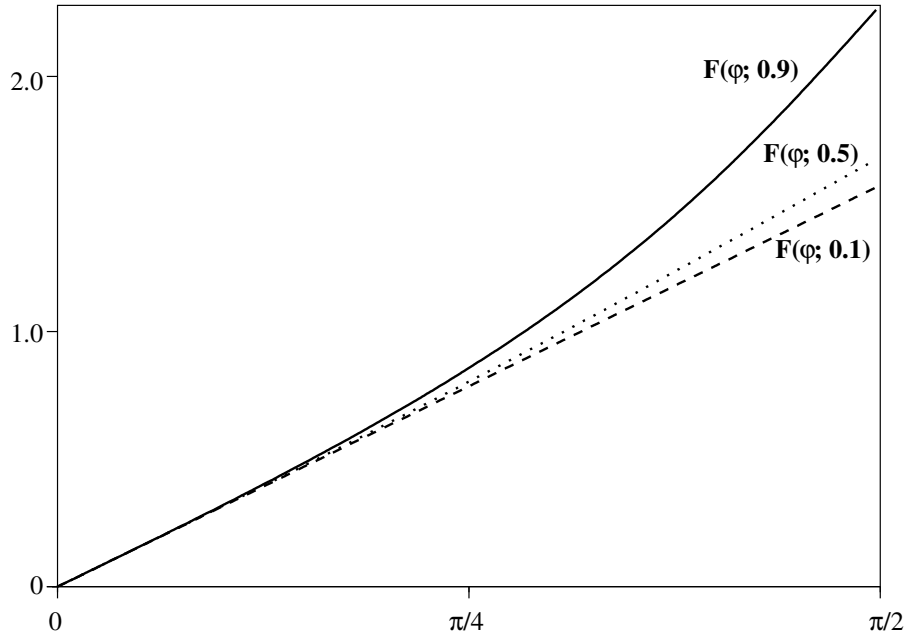


Abbildung 1: $F(\varphi; k)$ für verschiedene Module k

Eine besondere Bedeutung im Zusammenhang mit den elliptischen Funktionen (Abschnitt 3) hat folgende Relation, die auch in Abbildung 2 erkennbar ist.

$$F(\varphi + n\pi; k) = F(\varphi; k) + 2nK(k) \quad (14)$$

Beweis. Sie ergibt sich, wenn man mit $n = 1$ beginnt und dann iterativ fortsetzt.

$$\begin{aligned} F(\varphi + \pi; k) &= \int_0^{\varphi + \pi} \frac{d\phi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \phi}} \\ &= \int_{-\pi}^{\varphi} \frac{d\psi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2(\psi + \pi)}} \\ &= \int_0^{\varphi} \frac{d\psi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \psi}} - \int_0^{-\pi} \frac{d\psi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \psi}} \\ &= F(\varphi; k) + F(\pi; k) \\ &= F(\varphi; k) + 2K(k) \end{aligned} \quad (15)$$

□

Außerdem ist Gleichung 14 eine logische Schlussfolgerung, wenn man wie gewohnt das Integral als Fläche unter der periodischen Kurve $(1 - k^2 \sin^2 \phi)^{-1/2}$ interpretiert (vgl. Abbildung 3).

2 Elliptische Integrale

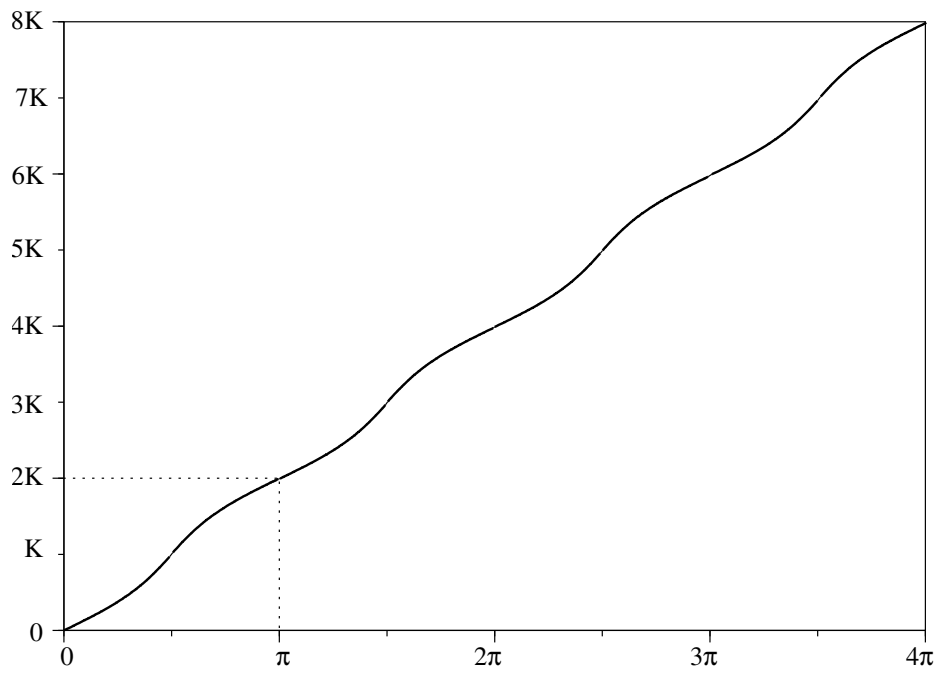


Abbildung 2: $F(\varphi; k)$ im Intervall $0 \leq \varphi \leq 4\pi$

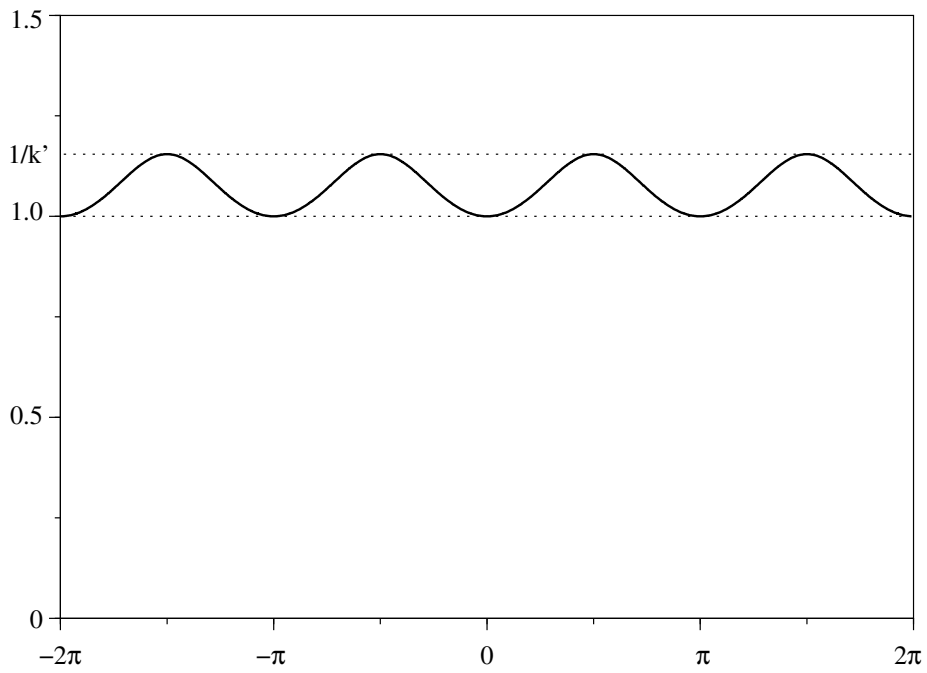


Abbildung 3: Funktionsverlauf des Integranden $(1 - k^2 \sin^2 \phi)^{-1/2}$

2 Elliptische Integrale

Aus der zweiten Ableitung nach Gleichung 17 und dem Funktionsverlauf entsprechend Abbildung 2 ist ersichtlich, daß die Wendepunkte bei $v \cdot \pi/2$ mit $v \in \mathbb{Z}$ liegen.

2.1.5 Erste Ableitung

Das Differential von $F(\varphi; k)$ ist nach dem Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung⁷

$$F'(\varphi; k) = \frac{1}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi}}. \quad (16)$$

2.1.6 Zweite Ableitung

Nochmaliges Differenzieren der ersten Ableitung $F'(\varphi; k)$ ergibt

$$\begin{aligned} F''(\varphi; k) &= -\frac{1}{2}(1 - k^2 \sin^2 \varphi)^{-\frac{3}{2}}(-2k^2 \sin \varphi \cos \varphi) \\ &= \frac{k^2}{2} F'(\varphi; k) \sin 2\varphi. \end{aligned} \quad (17)$$

2.1.7 Imaginäre Argumente

Für imaginäre Argumente entartet das unvollständige elliptische Integral zu

$$F(j\xi; k) = jF[\arctan(\sinh \xi); k']. \quad (18)$$

Beweis. Einsetzen des imaginären Arguments im Sinne von $\varphi = j\xi$ in Definitionsgleichung 3 führt zu

$$F(j\xi; k) = \int_{\phi=0}^{j\xi} \frac{d\phi}{\sqrt{1 - (1 - k'^2) \sin^2 \phi}}.$$

Mit der (im Intervall $|\phi| \leq \pi/2$) eindeutigen Substitution

$$\sin \phi = j \tan \theta \quad (19)$$

und deren Ableitung $d\phi/d\theta = j/\cos \theta$ kann man das Differential $d\phi/\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \phi}$ relativ einfach mit Hilfe des komplementären Moduls k' ausdrücken.⁸

⁷ $\frac{d}{dx} \int_a^x f(\xi) d\xi = f(x)$

⁸ Gleichung 19 stellt im Prinzip J's imaginäre Transformation dar.

2 Elliptische Integrale

$$\begin{aligned}
 F(\varphi; k) &= \int_{\sin \phi=0}^{\sin \phi=\sin \varphi} \frac{j d\theta}{\cos \theta \sqrt{1+(1-k'^2)\tan^2 \theta}} \\
 &= j \int_{\tan \theta=0}^{j \tan \theta=\sin j\xi} \frac{d\theta}{\sqrt{\cos^2 \theta+(1-k'^2)\sin^2 \theta}} \\
 &= j \int_0^{\arctan(\sinh \xi)} \frac{d\theta}{\sqrt{1-k'^2 \sin^2 \theta}} \tag{20}
 \end{aligned}$$

□

Schreibt man die rechte Seite von Gleichung 18 mit Hilfe der G
arctan(sinh ξ), dann gilt entsprechend:

-Funktion gdξ =

$$F(j\xi; k) = jF(\text{gd}\xi; k').$$

2.2 Vollständiges elliptisches Integral erster Art

2.2.1 Definition

Das vollständige elliptische Integral erster Art wird meist in den folgenden drei Formen, die sich durch die Art des Arguments unterscheiden, angegeben:

$$K(k) = \int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{(1-t^2)(1-k^2t^2)}}, \quad 0 \leq |k| \leq 1 \tag{21}$$

$$K(m) = \int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{(1-t^2)(1-mt^2)}}, \quad 0 \leq m \leq 1 \tag{22}$$

$$K(\phi) = \int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{(1-t^2)(1-t^2 \sin^2 \phi)}}, \quad -\frac{\pi}{2} \leq \phi \leq \frac{\pi}{2} \tag{23}$$

Häufig ist auch die Darstellung in der L
'schen Normalform nach Gleichung 24, die sich wieder mit der Substitution $t = \sin \phi$ aus Definitionsgleichung 21 ergibt.

$$K(k) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\phi}{\sqrt{1-k^2 \sin^2 \phi}} \tag{24}$$

2 Elliptische Integrale

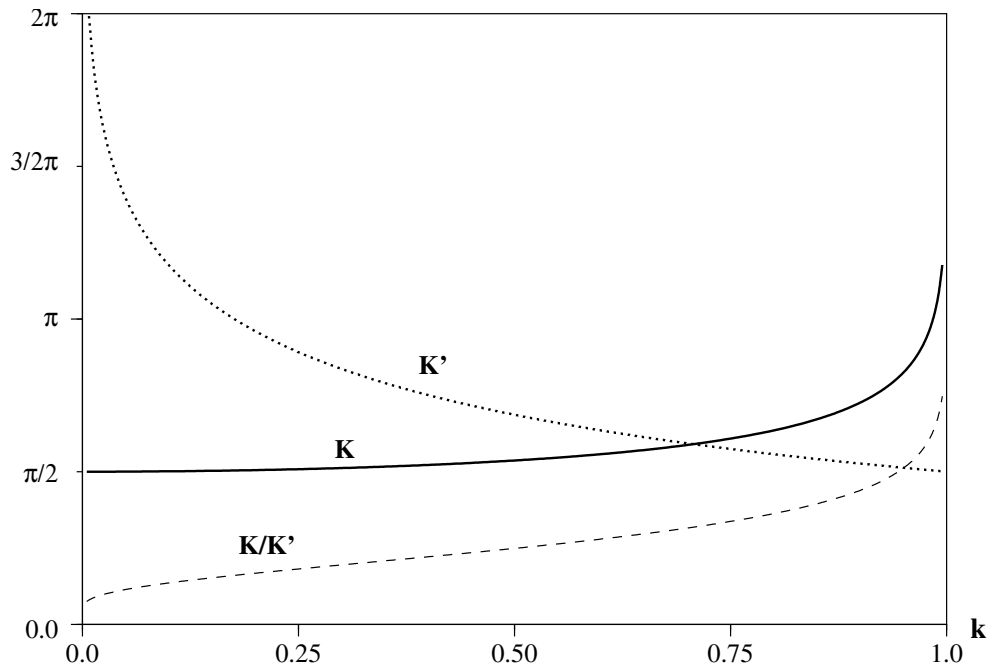


Abbildung 4: K , K' und K/K' als Funktion des Moduls k

Von Bedeutung ist auch das komplementäre elliptische Integral K' .

$$K' = K(k') = K(\sqrt{1-k^2}) \quad (25)$$

2.2.2 Spezielle Werte

$$K(0) = \int_0^{\pi/2} d\phi = \frac{\pi}{2} = K'(1) \quad (26)$$

$$K(1) = \int_0^{\pi/2} \frac{d\phi}{\cos \phi} = \infty = K'(0)$$

2.2.3 Funktionsverlauf

Die Funktionsverläufe von K und K' sowie das Verhältnis beider Integrale für reelles Argument k sind in Abbildung 4 dargestellt.

2.2.4 GAUSS-Form

Eine schon in Abschnitt 2.1 mit Hinweis auf C.F. Gauss eingeführte Variante dieses Integraltyps ist

3 Elliptische Funktionen

$$\int_{x=0}^{\infty} \frac{dx}{\sqrt{(x^2+a^2)(x^2+b^2)}}. \quad (27)$$

Wie schon in Gleichung 6 kann es auch dargestellt werden als

$$\begin{aligned} \int_{x=0}^{\infty} \frac{dx}{\sqrt{(x^2+a^2)(x^2+b^2)}} &= \frac{1}{a} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\phi}{\sqrt{1-(1-b^2/a^2)\sin^2\phi}} \\ &= \frac{1}{a} F\left[\frac{\pi}{2}; \sqrt{1-\left(\frac{b}{a}\right)^2}\right] \\ &= \frac{1}{a} K\left[\sqrt{1-\left(\frac{b}{a}\right)^2}\right]. \end{aligned} \quad (28)$$

Mit dem Modul entsprechend Gleichung 7 ergibt sich die Äquivalenz

$$\int_0^{\infty} \frac{dx}{\sqrt{(x^2+a^2)(x^2+b^2)}} = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{\sqrt{(x^2+a^2)(x^2+b^2)}} = \frac{1}{a} K(k).$$

3 Elliptische Funktionen

3.1 Definition

Die Definition der Jacobi'schen elliptischen Funktionen ist eng verknüpft mit der Umkehrfunktion des unvollständigen elliptischen Integrals erster Art $u = F(\varphi; k)$ in seiner Legendre'schen Normalform nach Gleichung 3, der sogenannten Amplitudenfunktion.

$$\varphi = \text{am}(u; k). \quad (29)$$

Mit Hilfe von $\text{am}(u; k)$ können die drei elliptischen Basisfunktionen *Sinus Amplitudinis* sn , *Cosinus Amplitudinis* cn und *Delta Amplitudinis* dn folgendermaßen angegeben werden [Jac29, § 17]:

$$\text{sn}(u; k) = \sin[\text{am}(u; k)] = \sin \varphi = x \quad (30)$$

$$\text{cn}(u; k) = \cos[\text{am}(u; k)] = \cos \varphi = \sqrt{1 - \sin^2 \varphi} = \sqrt{1 - x^2} \quad (31)$$

$$\text{dn}(u; k) = \Delta \text{am}(u; k) = \Delta(\varphi; k) = \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi} = \sqrt{1 - k^2 x^2}. \quad (32)$$

3 Elliptische Funktionen

Nahezu direkt ablesbar sind die wichtigen Beziehungen:

$$\operatorname{sn}^2(u; k) + \operatorname{cn}^2(u; k) = 1 \quad (33)$$

$$\operatorname{dn}^2(u; k) + k^2 \operatorname{sn}^2(u; k) = 1. \quad (34)$$

Über das komplementäre Modul $k' = \sqrt{1 - k^2}$ sind weitere nützliche Identitäten zu ermitteln.

$$k^2 \operatorname{cn}^2(u; k) + k'^2 = \operatorname{dn}^2(u; k) \quad (35)$$

$$\operatorname{cn}^2(u; k) + k'^2 \operatorname{sn}^2(u; k) = \operatorname{dn}^2(u; k) \quad (36)$$

Gleichung 30 läßt nun auch die folgende neue Darstellung des unvollständigen elliptischen Integrals entsprechend Definitionsgleichung 5 zu.

$$u = F_{\star}(x; k) = \int_0^{\operatorname{sn}(u; k)} \frac{dt}{\sqrt{(1-t^2)(1-k^2t^2)}} \quad (37)$$

Von den drei Basisfunktionen sind alle weiteren Jacobi'schen elliptischen Funktionen folgendermaßen abgeleitet:⁹ die mit den Buchstaben pq abgekürzte Funktion ist definiert als der Quotient der Basisfunktionen p und q . Dabei können p und q mit folgenden Buchstaben besetzt sein: s (sn), c (cn), d (dn), n (1), was zu 9 Varianten führt.

$\operatorname{sc}(u; k) = \frac{\operatorname{sn}(u; k)}{\operatorname{cn}(u; k)}$	$\operatorname{sd}(u; k) = \frac{\operatorname{sn}(u; k)}{\operatorname{dn}(u; k)}$	$\operatorname{ns}(u; k) = \frac{1}{\operatorname{sn}(u; k)}$
$\operatorname{cs}(u; k) = \frac{\operatorname{cn}(u; k)}{\operatorname{sn}(u; k)}$	$\operatorname{cd}(u; k) = \frac{\operatorname{cn}(u; k)}{\operatorname{dn}(u; k)}$	$\operatorname{nc}(u; k) = \frac{1}{\operatorname{cn}(u; k)}$
$\operatorname{ds}(u; k) = \frac{\operatorname{dn}(u; k)}{\operatorname{sn}(u; k)}$	$\operatorname{dc}(u; k) = \frac{\operatorname{dn}(u; k)}{\operatorname{cn}(u; k)}$	$\operatorname{nd}(u; k) = \frac{1}{\operatorname{dn}(u; k)}$

3.2 Spezielle Werte

Die speziellen Werte für die drei elliptischen Basisfunktionen ergeben sich direkt aus denen der Amplitudenfunktion $\operatorname{am}(u; k)$,

⁹Diese heutige kurze Notation stammt von W.L. G. und C. G. .

3 Elliptische Funktionen

$$\begin{aligned}\operatorname{am}(0; k) &= 0 \\ \operatorname{am}(K; k) &= \frac{\pi}{2} \\ \operatorname{am}(2K; k) &= \pi \\ \operatorname{am}(2nK; k) &= n\pi\end{aligned}$$

welche sich selbst wiederum (im Sinne ihrer Definition als Umkehrfunktion) aus den speziellen Werten von $F(\varphi; k)$ ergeben (vgl. Abschnitt 2.1).

$$\begin{array}{lll}\operatorname{sn}(0; k) = 0 & \operatorname{cn}(0; k) = 1 & \operatorname{dn}(0; k) = 1 \\ \operatorname{sn}(K; k) = 1 & \operatorname{cn}(K; k) = 0 & \operatorname{dn}(K; k) = \sqrt{1-k^2} = k' \\ \operatorname{sn}(2K; k) = 0 & \operatorname{cn}(2K; k) = -1 & \operatorname{dn}(2K; k) = 1 \\ \operatorname{sn}(3K; k) = -1 & \operatorname{cn}(3K; k) = 0 & \operatorname{dn}(3K; k) = k'\end{array}$$

Aus den Formeln für halbe Argumente (siehe Gleichung 54) kann man die Werte für $u = K/2$ ermitteln.

$$\begin{aligned}\operatorname{sn}\left(\frac{K}{2}; k\right) &= \frac{1}{\sqrt{1+k'}} = \frac{\operatorname{cn}(K/2; k)}{\operatorname{dn}(K/2; k)} \\ \operatorname{cn}\left(\frac{K}{2}; k\right) &= \sqrt{\frac{k'}{1+k'}} \\ \operatorname{dn}\left(\frac{K}{2}; k\right) &= \sqrt{k'}\end{aligned}\tag{38}$$

3.3 Spezielle Module

Die folgenden speziellen Werte für das Modul k ergeben sich direkt aus den Gleichungen 12 und 13.¹⁰

$$\begin{aligned}\operatorname{sn}(u; 1) &= \tanh u \\ \operatorname{cn}(u; 1) &= \operatorname{sech} u = \frac{1}{\operatorname{cosh} u} \\ \operatorname{dn}(u; 1) &= \operatorname{sech} u\end{aligned}$$

Für verschwindendes Modul erhält man

¹⁰Ursache ist, daß das unvollständige elliptische Integral erster Art $F(\varphi; k)$ für $k = 0$ und $k = 1$ entartet (siehe Abschnitt 2).

3 Elliptische Funktionen

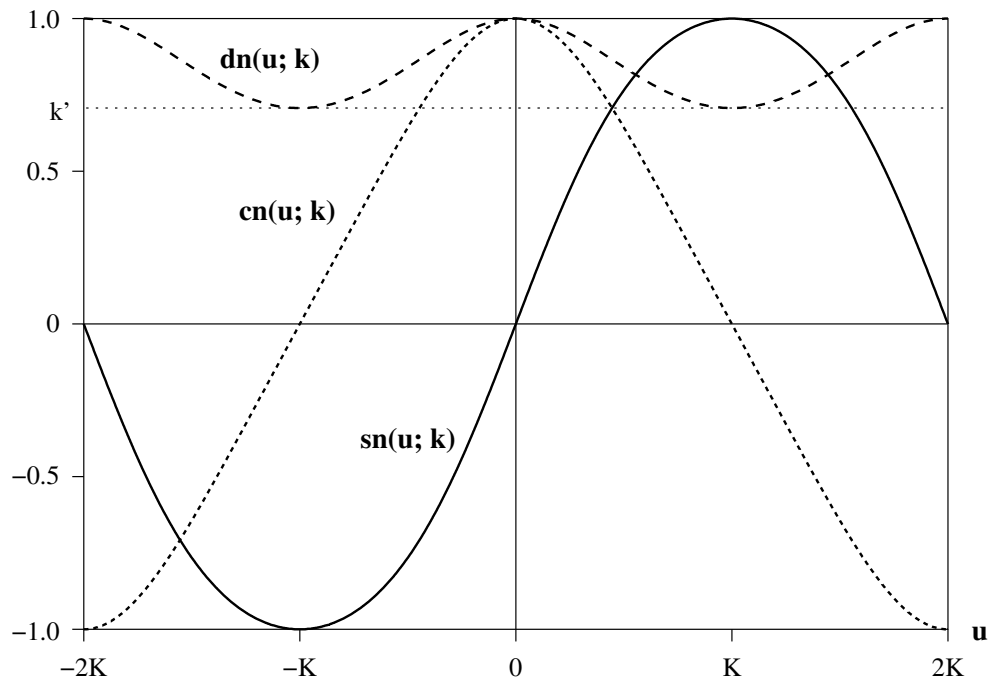


Abbildung 5: Elliptische Basisfunktionen

$$\operatorname{sn}(u; 0) = \sin u$$

$$\operatorname{cn}(u; 0) = \cos u$$

$$\operatorname{dn}(u; 0) = 1 .$$

3.4 Funktionsverlauf

Durch die Anwendung der trigonometrischen Funktionen auf die Amplitudenfunktion $\operatorname{am}(u; k)$ und wegen Gleichung 14 sind alle elliptischen Funktionen periodisch. Wie Abbildung 5 illustriert, ist dabei $K = K(k)$ entweder die sogenannte (reelle) Halb- oder Viertelperiode.¹¹ Die Funktionsverläufe aller anderen Jacobi'schen elliptischen Funktionen sind zum Beispiel in [AS72] zu finden.

Zu bemerken ist an dieser Stelle, daß anders als bei den trigonometrischen Funktionen im allgemeinen immer gilt $\operatorname{sn}(u + K; k) \neq \operatorname{cn}(u; k)$.

¹¹In Analogie zu den einfach-periodischen Funktionen, wie z. B. $\sin x$ und $\cos x$, deren Perioden bekanntlich 2π betragen, ist es bei doppelt-periodischen Funktionen (insbesondere den Weierstrass'schen elliptischen \wp -Funktionen) meist üblich, die Periode mit 2ω zu bezeichnen [WW27, § 20.1], [Tri48, I, § 2].

3.5 Erste Ableitung

Um die Ableitung von $\operatorname{sn}(u; k)$ zu bestimmen soll zuerst das Differential der Amplitudenfunktion $\operatorname{am}(u; k)$ ermittelt werden. Unter Berücksichtigung von Gleichung 16 ergibt sich im Zusammenhang mit der Regel für die Ableitung einer Umkehrfunktion:

$$\operatorname{am}'(u; k) = \frac{1}{F'(u; k)} = \sqrt{1 - k^2 \sin^2 u}.$$

Nun kann mit Hilfe der Kettenregel weiter abgeleitet werden.

$$\begin{aligned} \operatorname{sn}'(u; k) &= \frac{d}{du} \sin \operatorname{am}(u; k) \\ &= \cos \operatorname{am}(u; k) \cdot \operatorname{am}'(u; k) \\ &= \operatorname{cn}(u; k) \sqrt{1 - k^2 \sin^2 u} \\ &= \operatorname{cn}(u; k) \operatorname{dn}(u; k) \end{aligned} \tag{39}$$

Die erste Ableitung für $\operatorname{cn}(u; k)$ kann entweder in gleicher Art und Weise ermittelt werden, oder aber wie in [Koe74, 19] durch direkte Differentiation von Gleichung 33.

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{d}{du} \operatorname{sn}^2(u; k) + \frac{d}{du} \operatorname{cn}^2(u; k) \\ 0 &= \operatorname{sn}(u; k) \operatorname{sn}'(u; k) + \operatorname{cn}(u; k) \operatorname{cn}'(u; k) \\ 0 &= \operatorname{sn}(u; k) \operatorname{cn}(u; k) \operatorname{dn}(u; k) + \operatorname{cn}(u; k) \operatorname{cn}'(u; k) \\ \operatorname{cn}'(u; k) &= -\operatorname{sn}(u; k) \operatorname{dn}(u; k) \end{aligned}$$

Für $\operatorname{dn}(u; k)$ kann wieder äquivalent vorgegangen werden, nur Ausgangspunkt ist diesmal Gleichung 34.

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{d}{du} \operatorname{dn}^2(u; k) + k^2 \frac{d}{du} \operatorname{sn}^2(u; k) \\ 0 &= \operatorname{dn}(u; k) \operatorname{dn}'(u; k) + k^2 \operatorname{sn}(u; k) \operatorname{sn}'(u; k) \\ 0 &= \operatorname{dn}(u; k) \operatorname{dn}'(u; k) + k^2 \operatorname{sn}(u; k) \operatorname{cn}(u; k) \operatorname{dn}(u; k) \\ \operatorname{dn}'(u; k) &= -k^2 \operatorname{sn}(u; k) \operatorname{cn}(u; k) \end{aligned}$$

Mit $x = \operatorname{sn}(u; k)$ entsprechend der Definitionsgleichung 30 des elliptischen Sinus' sowie den Relationen 33 und 34 lassen sich außerdem folgende Darstellungen angeben.

$$\begin{aligned} x'^2 &= (1 - x^2)(1 - k^2 x^2), & x &= \operatorname{sn}(u; k) \\ x'^2 &= (1 - x^2)(k'^2 + k^2 x^2), & x &= \operatorname{cn}(u; k) \\ x'^2 &= (1 - x^2)(x^2 - k'^2), & x &= \operatorname{dn}(u; k) \end{aligned}$$

3.6 Zweite Ableitung

Für den elliptischen Sinus sei hier noch exemplarisch die zweite Ableitung entwickelt.

$$\begin{aligned} \operatorname{sn}''(u; k) &= \frac{d}{du} \operatorname{cn}(u; k) \operatorname{dn}(u; k) \\ &= \operatorname{dn}(u; k) \operatorname{cn}'(u; k) + \operatorname{cn}(u; k) \operatorname{dn}'(u; k) \\ &= -\operatorname{dn}(u; k) \operatorname{sn}(u; k) \operatorname{dn}(u; k) - k^2 \operatorname{cn}(u; k) \operatorname{sn}(u; k) \operatorname{cn}(u; k) \\ &= -\operatorname{sn}(u; k) \left[\operatorname{dn}^2(u; k) + k^2 \operatorname{cn}^2(u; k) \right] \end{aligned}$$

In gleicher Art und Weise ergibt sich für die anderen beiden Funktionen

$$\begin{aligned} \operatorname{cn}''(u; k) &= -\operatorname{cn}(u; k) \left[\operatorname{dn}^2(u; k) - k^2 \operatorname{sn}^2(u; k) \right] \\ \operatorname{dn}''(u; k) &= k^2 \operatorname{dn}(u; k) \left[\operatorname{sn}^2(u; k) - \operatorname{cn}^2(u; k) \right]. \end{aligned}$$

Wie für die erste Ableitung auch, kann man die Gleichungen ebenfalls auf der Basis von x schreiben.

$$\begin{aligned} x''^2 &= -x(1 + k^2 - 2k^2x^2), & x &= \operatorname{sn}(u; k) \\ x''^2 &= -x(1 - 2k^2 + 2k^2x^2), & x &= \operatorname{cn}(u; k) \\ x''^2 &= x(2 - k^2 - 2x^2), & x &= \operatorname{dn}(u; k) \end{aligned}$$

3.7 Additionstheoreme

Die Additionstheoreme der elliptischen Funktionen haben grundlegende Bedeutung für viele weitere Formeln. Deshalb haben zahlreiche Mathematiker des 18. und 19. Jahrhunderts, unter anderem A.-M. L., C.G.J. J., J. L. und C.F. G., sich mit dem Beweis dieser Gleichungen beschäftigt.¹² Zuerst hat jedoch L. E. im Jahre 1756/57 das Additionstheorem des elliptischen Sinus' (E-Theorem) bewiesen [WW27, § 22·2], [Hur00, II-3].

$$\operatorname{sn}(u + v) = \frac{\operatorname{sn} u \operatorname{cn} v \operatorname{dn} v + \operatorname{sn} v \operatorname{cn} u \operatorname{dn} u}{1 - k^2 \operatorname{sn}^2 u \operatorname{sn}^2 v} \quad (40)$$

Beweis. Der hier dargelegte Beweis folgt (wie auch [Ach70, § 28]) in wesentlichen Schritten den Ausführungen von J.G. D. Als Ausgangspunkt dient dabei die Differentialgleichung der Transformationstheorie (Formel 69 für den Fall $\lambda = k$ und $M = 1$),

¹²In [Cay76, II] sind einige der Beweiswege enthalten.

3 Elliptische Funktionen

$$\frac{M d\theta}{\sqrt{1-\lambda^2 \sin^2 \theta}} = \frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2 \sin^2 \varphi}}$$

$$\frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2 x^2)}} = \frac{dy}{\sqrt{(1-y^2)(1-k^2 y^2)}}$$

für die hier eine Lösung gefunden werden soll. Genauso wie in Abschnitt 4.5 erweist es sich als günstig zur Parameterform des Differentials überzugehen.

$$du = \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2 x^2)}} = \frac{dy}{\sqrt{(1-y^2)(1-k^2 y^2)}} \quad (41)$$

Die einzelnen Ableitungen nach u kann man integrieren

$$\frac{dx}{du} = \sqrt{(1-x^2)(1-k^2 x^2)} \quad \frac{dy}{du} = \sqrt{(1-y^2)(1-k^2 y^2)}$$

$$u = \int_0^x \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2 x^2)}} = F(x; k) \quad v = u - A = \int_0^y \frac{dy}{\sqrt{(1-y^2)(1-k^2 y^2)}} = F(y; k) \quad (42)$$

und (bei Berücksichtigung der Integrationskonstante A) Gleichung 41 auch darstellen als:

$$u - v = A .$$

Nach diesen einfachen Vorbetrachtungen differenziert man nun das Quadrat der Ableitungen dx/du sowie dy/du in den Gleichungen 42 nocheinmal nach u , also folgendermaßen:

$$\frac{d}{du} \frac{d}{du} \left(\frac{dx}{du} \right)^2 = \frac{d}{du} [(1-x^2)(1-k^2 x^2)]$$

$$2 \frac{dx}{du} \frac{d^2 x}{du^2} = -2x \frac{dx}{du} (1-k^2 x^2) - 2xk^2 \frac{dx}{du} (1-x^2)$$

$$\frac{d^2 x}{du^2} = x(2k^2 x^2 - k^2 - 1) .$$

Auf dem gleichen Weg gelangt man zu:

$$\frac{d^2 y}{du^2} = y(2k^2 y^2 - k^2 - 1) .$$

Stellt man die zuletzt gewonnenen Formeln nach $1+k^2$ um und setzt sie nach Multiplikation mit xy beide gleich, so erhält man das folgende wichtige Zwischenergebnis

3 Elliptische Funktionen

$$\begin{aligned}
 2k^2 x^2 xy - y \frac{d^2 x}{du^2} &= 2k^2 y^2 xy - x \frac{d^2 y}{du^2} \\
 y \frac{d^2 x}{du^2} - x \frac{d^2 y}{du^2} &= 2k^2 xy(x^2 - y^2) \\
 \frac{d}{du} \left(y \frac{dx}{du} - x \frac{dy}{du} \right) &= 2k^2 xy(x^2 - y^2). \tag{43}
 \end{aligned}$$

Jetzt soll unabhängig davon der Ausdruck

$$y^2 \left(\frac{dx}{du} \right)^2 - x^2 \left(\frac{dy}{du} \right)^2$$

bestimmt werden. Einsetzen der Ableitungen von 42 gefolgt von Ausmultiplizieren und Zusammenfassen führt zur nächsten Zwischengleichung.

$$\begin{aligned}
 y^2 \left(\frac{dx}{du} \right)^2 - x^2 \left(\frac{dy}{du} \right)^2 &= y^2(1-x^2)(1-k^2x^2) - x^2(1-y^2)(1-k^2y^2) \\
 &= y^2 + k^2y^2x^4 - x^2 - k^2x^2y^4 \\
 &= (y^2 - x^2)(1 - k^2x^2y^2) \tag{44}
 \end{aligned}$$

Nun dividiert man Gleichung 43 durch die soeben entwickelte und wendet auf den linken Nenner den binomischen Satz an.

$$\begin{aligned}
 \frac{\frac{d}{du} \left(y \frac{dx}{du} - x \frac{dy}{du} \right)}{y^2 \left(\frac{dx}{du} \right)^2 - x^2 \left(\frac{dy}{du} \right)^2} &= \frac{2k^2 xy(x^2 - y^2)}{(y^2 - x^2)(1 - k^2x^2y^2)} \\
 \frac{\frac{d}{du} \left(y \frac{dx}{du} - x \frac{dy}{du} \right)}{y \frac{dx}{du} - x \frac{dy}{du}} &= \frac{2k^2 xy(x^2 - y^2)(y \frac{dx}{du} + x \frac{dy}{du})}{(y^2 - x^2)(1 - k^2x^2y^2)} \\
 \frac{\frac{d}{du} \left(y \frac{dx}{du} - x \frac{dy}{du} \right)}{y \frac{dx}{du} - x \frac{dy}{du}} &= \frac{2k^2 xy(y \frac{dx}{du} + x \frac{dy}{du})}{(k^2x^2y^2 - 1)}
 \end{aligned}$$

Es ist zu erkennen, daß auf beiden Seiten Zähler und Nenner dem logarithmischen Differentiationsatz $[\ln f(u)]' = f'(u)/f(u)$ entsprechen.¹³

$$\frac{d}{du} \ln \left(y \frac{dx}{du} - x \frac{dy}{du} \right) = \frac{d}{du} \ln (k^2 x^2 y^2 - 1)$$

¹³Für die rechte Seite gilt bei Anwendung der Produktregel $\frac{d}{du}(k^2x^2y^2 - 1) = k^2(2x\frac{dx}{du}y^2 + 2y\frac{dy}{du}x^2) = 2k^2xy(y\frac{dx}{du} + x\frac{dy}{du})$

3 Elliptische Funktionen

Integration nach u und Einsetzen der Differentiale von Gleichung 42 führt zu

$$\begin{aligned}\ln\left(y\frac{dx}{du}-x\frac{dy}{du}\right) &= \ln(k^2x^2y^2-1)+B \\ y\frac{dx}{du}-x\frac{dy}{du} &= C(k^2x^2y^2-1) \\ y\frac{dx}{du}-x\frac{dy}{du} &= C(k^2x^2y^2-1),\end{aligned}$$

also

$$\frac{y\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}-x\sqrt{(1-y^2)(1-k^2y^2)}}{k^2x^2y^2-1}=C.$$

Mit $\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)} = \text{cn}(u; k)\text{dn}(u; k)$ und $\sqrt{(1-y^2)(1-k^2y^2)} = \text{cn}(v; k)\text{dn}(v; k)$ nach Definitionsgleichung 32 und 30 gilt also:

$$C = \frac{\text{sn}v\text{cn}u\text{dn}u - \text{sn}u\text{cn}v\text{dn}v}{k^2x^2y^2-1}.$$

Die Konstante C muß nun aber eine Funktion von A sein, also $C = \phi(A) = \phi(u-v)$ gelten. Um die Form von ϕ zu finden kann man z. B. $v = 0$ setzen, was zu $C = \text{sn}(u; k) = \phi(u)$ führt. Also ist die Form von ϕ der elliptische Sinus und somit ist der Beweis auf der Grundlage des folgenden Subtraktionstheorems erbracht.

$$\text{sn}(u-v) = \frac{\text{sn}v\text{cn}u\text{dn}u - \text{sn}u\text{cn}v\text{dn}v}{k^2x^2y^2-1}$$

□

Die beiden anderen elliptischen Basisfunktionen sind entweder genauso oder aber aus ihren Definitionsgleichungen abzuleiten. Hier wird jedoch darauf verzichtet und statt dessen nur das Ergebnis präsentiert (wobei in den Formeln wieder auf das Modul k verzichtet wird).

$$\text{cn}(u+v) = \frac{\text{cn}u\text{cn}v - \text{sn}u\text{dn}u\text{sn}v\text{dn}v}{1-k^2\text{sn}^2u\text{sn}^2v} \quad (45)$$

$$\text{dn}(u+v) = \frac{\text{dn}u\text{dn}v - k^2\text{sn}u\text{cn}u\text{sn}v\text{cn}v}{1-k^2\text{sn}^2u\text{sn}^2v} \quad (46)$$

Äußerst interessant sind auch die daraus abgeleiteten Relationen¹⁴ für den elliptischen Sinus

¹⁴In [Cay76, § 93] und [Web91, § 93] sind zahlreiche Relationen dieser Art tabelliert.

3 Elliptische Funktionen

$$\operatorname{sn}(u+a)\operatorname{sn}(u-a) = \frac{\operatorname{sn}^2 u - \operatorname{sn}^2 a}{1 - k^2 \operatorname{sn}^2 u \operatorname{sn}^2 a} \quad (47)$$

$$[1 - \operatorname{sn}(u+a)][1 - \operatorname{sn}(u-a)] = \frac{(\operatorname{cn} a - \operatorname{sn} u \operatorname{dn} a)^2}{1 - k^2 \operatorname{sn}^2 u \operatorname{sn}^2 a} \quad (48)$$

$$[1 - k \operatorname{sn}(u+a)][1 - k \operatorname{sn}(u-a)] = \frac{(\operatorname{dn} a - k \operatorname{sn} u \operatorname{cn} a)^2}{1 - k^2 \operatorname{sn}^2 u \operatorname{sn}^2 a} \quad (49)$$

die insbesondere in der Transformationstheorie häufig auch in folgender Form anzutreffen sind (mit $\operatorname{sn}(K-a) = \operatorname{cn} a / \operatorname{dn} a$, vgl. Tabelle 3)

$$\frac{[1 - \operatorname{sn}(u+a)][1 - \operatorname{sn}(u-a)]}{\operatorname{cn}^2 a} = \frac{\left[1 - \frac{\operatorname{sn} u}{\operatorname{sn}(K-a)}\right]^2}{1 - k^2 \operatorname{sn}^2 u \operatorname{sn}^2 a}$$

$$\frac{[1 - k \operatorname{sn}(u+a)][1 - k \operatorname{sn}(u-a)]}{\operatorname{dn}^2 a} = \frac{[1 - \operatorname{sn} u \operatorname{sn}(K-a)]^2}{1 - k^2 \operatorname{sn}^2 u \operatorname{sn}^2 a}.$$

Im Zusammenhang mit den quadratischen Transformationen ist auch folgende Relation interessant

$$(1+k')\operatorname{sn}\left(u - \frac{K}{2}\right)\operatorname{sn}\left(u + \frac{K}{2}\right) = -\frac{1 - (1+k')\operatorname{sn}^2 u}{1 - (1-k')\operatorname{sn}^2 u}. \quad (50)$$

Beweis. Es handelt sich hier um einen Spezialfall von Formel 47 mit $a = K/2$.

$$(1+k')\operatorname{sn}\left(u - \frac{K}{2}\right)\operatorname{sn}\left(u + \frac{K}{2}\right) = (1+k')\frac{\operatorname{sn}^2 u - \operatorname{sn}^2(K/2)}{1 - k^2 \operatorname{sn}^2 u \operatorname{sn}^2(K/2)}$$

Ersetzt man noch den speziellen Wert $\operatorname{sn}(K/2; k) = (1+k')^{-1/2}$, so ist der Beweis schon erbracht.

$$(1+k')\operatorname{sn}\left(u - \frac{K}{2}\right)\operatorname{sn}\left(u + \frac{K}{2}\right) = (1+k')\frac{\operatorname{sn}^2 u - (1+k')^{-1}}{1 - (1-k')\operatorname{sn}^2 u}$$

$$= -\frac{1 - (1+k')\operatorname{sn}^2 u}{1 - (1-k')\operatorname{sn}^2 u}$$

□

Weitere ausgewählte Formeln für cn und dn sind:

3 Elliptische Funktionen

$$\begin{aligned}\operatorname{cn}(u+a)\operatorname{cn}(u-a) &= \frac{\operatorname{cn}^2 u \operatorname{cn}^2 a - k'^2 \operatorname{sn}^2 u \operatorname{sn}^2 a}{1 - k^2 \operatorname{sn}^2 u \operatorname{sn}^2 a} \\ \operatorname{dn}(u+a)\operatorname{dn}(u-a) &= \frac{\operatorname{dn}^2 u \operatorname{dn}^2 a + k^2 k'^2 \operatorname{sn}^2 u \operatorname{sn}^2 a}{1 - k^2 \operatorname{sn}^2 u \operatorname{sn}^2 a}.\end{aligned}$$

3.8 Doppelte Argumente

Die Gleichungen für doppelte Argumente ergeben sich direkt aus den Additionstheoremen, wenn man $u = v$ setzt.

$$\begin{aligned}\operatorname{sn} 2u &= \frac{2 \operatorname{sn} u \operatorname{cn} u \operatorname{dn} u}{1 - k^2 \operatorname{sn}^4 u} & (51) \\ \operatorname{cn} 2u &= \frac{\operatorname{cn}^2 u - \operatorname{sn}^2 u \operatorname{dn}^2 u}{1 - k^2 \operatorname{sn}^4 u} \\ \operatorname{dn} 2u &= \frac{\operatorname{dn}^2 u - k^2 \operatorname{sn}^2 u \operatorname{cn}^2 u}{1 - k^2 \operatorname{sn}^4 u}\end{aligned}$$

Statt des jeweils gleichen Ausdrucks im Nenner dieser Formeln findet man in der Literatur auch häufig die äquivalenten Darstellungen

$$1 - k^2 \operatorname{sn}^4 u = \operatorname{cn}^2 u + \operatorname{sn}^2 u \operatorname{dn}^2 u = \operatorname{dn}^2 u + k^2 \operatorname{cn}^2 u \operatorname{sn}^2 u,$$

welche sich durch Einsetzen der Definitionsgleichungen 31 und 32 relativ einfach auf $1 - k^2 \operatorname{sn}^4 u$ reduzieren lassen.

Weitere bekannte Relationen für doppelte Argumente sind nach [AS72, 16.18.5]

$$\frac{1 - \operatorname{dn} 2u}{1 + \operatorname{dn} 2u} = \left(\frac{k \operatorname{sn} u \operatorname{cn} u}{\operatorname{dn} u} \right)^2 \quad (52)$$

$$\frac{1 - \operatorname{sn} 2u}{1 + \operatorname{sn} 2u} = \left(\frac{\operatorname{cn} u - \operatorname{sn} u \operatorname{dn} u}{\operatorname{cn} u + \operatorname{sn} u \operatorname{dn} u} \right)^2. \quad (53)$$

3.9 Halbe Argumente

Die Gleichungen für halbe Argumente sind aus dem Gleichungssystem für doppelte Argumente ableitbar, wenn man u durch $u/2$ ersetzt und entsprechend umstellt [Tri48, III, § 3].

3 Elliptische Funktionen

$$\operatorname{sn} \frac{u}{2} = \sqrt{\frac{1 - \operatorname{cn} u}{1 - \operatorname{dn} u}} \quad (54)$$

$$\operatorname{cn} \frac{u}{2} = \sqrt{\frac{\operatorname{dn} u + \operatorname{cn} u}{1 + \operatorname{dn} u}} \quad (55)$$

$$\operatorname{dn} \frac{u}{2} = \sqrt{\frac{\operatorname{dn} u + k^2 \operatorname{cn} u + k'^2}{1 + \operatorname{dn} u}} \quad (56)$$

3.10 Imaginäre Argumente

Ausgehend von den grundlegenden Definitionsgleichungen des elliptischen Sinus'

$$u = F(\varphi; k), \quad \varphi = \operatorname{am}(u; k), \quad \operatorname{sn}(u; k) = \sin \varphi$$

sowie den Beziehungen 18 und 19 zur imaginären Transformation des elliptischen Integrals $F(\varphi; k)$ kann man für ein imaginäres Argument $u = jv$ schreiben:

$$u = F(\varphi; k) = F(j\xi; k) = jF[\arctan(\sinh \xi); k'] = jv.$$

Ausgehend von der Zusammenfassung

$$v = F[\arctan(\sinh \xi); k'] = F(\theta; k'), \quad \theta = \operatorname{am}(v; k'), \quad \operatorname{sn}(v; k') = \sin \theta$$

ist J's imaginäre Transformation für den elliptischen Sinus nun auf direktem Wege zu gewinnen [Jac29, § 19].

$$\begin{aligned} \operatorname{sn}(jv; k) &= \operatorname{sn}(u; k) = \sin \varphi \\ &= j \tan \theta = j \frac{\sin \theta}{\cos \theta} = j \frac{\operatorname{sn}(v; k')}{\operatorname{cn}(v; k')} \end{aligned}$$

$$\operatorname{sn}(jv; k) = j \operatorname{sc}(v; k') \quad (57)$$

Interessant ist daran vor allem zu erkennen, daß $\operatorname{sn}(u; k)$ zusätzlich zur reellen Periode $2\omega = 4K(k)$ auch eine imaginäre Periode von $2\omega' = 2K(k')$ besitzt, d. h. es handelt sich um eine doppelt-periodische Funktion mit dem Periodenpaar $(4K, 2K')$.

3 Elliptische Funktionen

Eine ähnliche Transformationsbeziehung kann man mit Hilfe der Verschiebungsrelation $\operatorname{dn}(v + K + jK'; k) = jk' \operatorname{sc}(u; k)$ angeben (siehe Tabelle 3).

$$\operatorname{sn}(jv; k) = \frac{1}{k} \operatorname{dn}(v + K' + jK; k')$$

Offensichtlich hat $\operatorname{sn}(u; k)$ imaginäre Pole $u_{\pm\nu}$, die genau dort liegen wo $\operatorname{cn}(v; k')$ verschwindet.¹⁵

$$u_{\pm\nu} = j(2\nu + 1)K', \quad \nu \in \mathbb{Z} \quad (58)$$

Für cn ist diese Transformation ausgehend von Gleichung 31 recht schnell abzuleiten.

$$\begin{aligned} \operatorname{cn}(jv; k) &= \sqrt{1 - \operatorname{sn}^2(jv; k)} \\ &= \sqrt{1 + \operatorname{sc}^2(v; k')} \\ &= \frac{1}{\operatorname{cn}(v; k')} = \operatorname{nc}(v; k') \end{aligned} \quad (59)$$

Gleichermaßen für die elliptische Delta-Amplitude $\operatorname{dn}(jv; k)$.

$$\operatorname{dn}(jv; k) = \operatorname{dc}(v; k'). \quad (60)$$

Beweis. Ausgehend von der Definitionsgleichung 32 für $\operatorname{dn}(v; k)$ gilt:

$$\begin{aligned} \operatorname{dn}(jv; k) &= \sqrt{1 - k^2 \operatorname{sn}^2(jv; k)} \\ &= \sqrt{1 - k^2 j^2 \frac{\operatorname{sn}^2(v; k')}{\operatorname{cn}^2(v; k')}} \\ &= \sqrt{\frac{\operatorname{cn}^2(v; k') + k^2 \operatorname{sn}^2(v; k')}{\operatorname{cn}^2(v; k')}} \\ &= \frac{\sqrt{1 - k'^2 \operatorname{sn}^2(v; k')}}{\operatorname{cn}(v; k')} \\ &= \frac{\operatorname{dn}(v; k')}{\operatorname{cn}(v; k')} = \operatorname{dc}(v; k'). \end{aligned}$$

□

¹⁵Eine grundsätzliche Einführung in die doppelt-periodischen (elliptischen) Funktionen kann man z. B. in [WW27, XX], [Tri48, I] und [Cay76] nachlesen. Insbesondere sind dort auch verallgemeinerte Aussagen zur Anzahl und Lage der Pol- und Nullstellen sowie den Residuen (Satz von L) enthalten.

3 Elliptische Funktionen

Abschließend noch (ohne Beweis) die anderen elliptischen Funktionen für imaginäre Argumente.

$$\begin{array}{lll}
 \operatorname{sc}(jv; k) = \operatorname{jsn}(v; k') & \operatorname{sd}(jv; k) = \operatorname{jsd}(v; k') & \operatorname{ns}(jv; k) = -\operatorname{jcs}(v; k') \\
 \operatorname{cs}(jv; k) = -\operatorname{jns}(v; k') & \operatorname{cd}(jv; k) = \operatorname{nd}(v; k') & \operatorname{nc}(jv; k) = \operatorname{nc}(v; k') \\
 \operatorname{ds}(jv; k) = -\operatorname{jds}(v; k') & \operatorname{dc}(jv; k) = \operatorname{dn}(v; k') & \operatorname{nd}(jv; k) = \operatorname{cd}(v; k')
 \end{array}$$

Bemerkenswert ist, daß alle Jacobi'schen elliptischen Funktionen sowohl für imaginäre als auch reelle Argumente immer periodisch sind.¹⁶

3.11 Komplexe Argumente

Die Gleichungen für komplexe Argumente ergeben sich relativ einfach aus den Additionstheoremen 40, 45, 46 und den Formeln 57, 59, 60 für rein imaginäre Argumente. Am Beispiel der elliptischen Delta-Amplitude soll dies kurz dargestellt werden.

$$\begin{aligned}
 \operatorname{dn}(\alpha + j\beta; k) &= \frac{\operatorname{dn}(\alpha; k)\operatorname{dn}(j\beta; k) - k^2\operatorname{sn}(\alpha; k)\operatorname{cn}(\alpha; k)\operatorname{sn}(j\beta; k)\operatorname{cn}(j\beta; k)}{1 - k^2\operatorname{sn}^2(\alpha; k)\operatorname{sn}^2(j\beta; k)} \\
 &= \frac{\operatorname{dn}(\alpha; k)\operatorname{dc}(\beta; k') - k^2\operatorname{sn}(\alpha; k)\operatorname{cn}(\alpha; k)\operatorname{jsc}(\beta; k')\operatorname{nc}(\beta; k')}{1 - k^2\operatorname{sn}^2(\alpha; k)\operatorname{jsc}^2(\beta; k')}
 \end{aligned}$$

$$\operatorname{dn}(\alpha + j\beta; k) = \frac{\operatorname{dn}(\alpha; k)\operatorname{cn}(\beta; k')\operatorname{dn}(\beta; k') - \operatorname{jk}^2\operatorname{sn}(\alpha; k)\operatorname{cn}(\alpha; k)\operatorname{sn}(\beta; k')}{\operatorname{cn}^2(\beta; k') + k^2\operatorname{sn}^2(\alpha; k)\operatorname{sn}^2(\beta; k')} \quad (61)$$

Die Formeln für die zwei anderen elliptischen Basisfunktionen können in gleicher Art und Weise gewonnen werden.¹⁷

$$\operatorname{sn}(\alpha + j\beta; k) = \frac{\operatorname{sn}(\alpha; k)\operatorname{dn}(\beta; k') + \operatorname{jcn}(\alpha; k)\operatorname{dn}(\alpha; k)\operatorname{sn}(\beta; k')\operatorname{cn}(\beta; k')}{\operatorname{cn}^2(\beta; k') + k^2\operatorname{sn}^2(\alpha; k)\operatorname{sn}^2(\beta; k')} \quad (62)$$

$$\operatorname{cn}(\alpha + j\beta; k) = \frac{\operatorname{cn}(\alpha; k)\operatorname{cn}(\beta; k') - \operatorname{jcn}(\alpha; k)\operatorname{sn}(\beta; k')\operatorname{dn}(\alpha; k)\operatorname{dn}(\beta; k')}{\operatorname{cn}^2(\beta; k') + k^2\operatorname{sn}^2(\alpha; k)\operatorname{sn}^2(\beta; k')} \quad (63)$$

Zur Veranschaulichung dieser Erkenntnisse sind in den Abbildungen 6 und 7 die von Real- und Imaginärteil aufgespannten Flächen grafisch dargestellt.¹⁸

3 Elliptische Funktionen

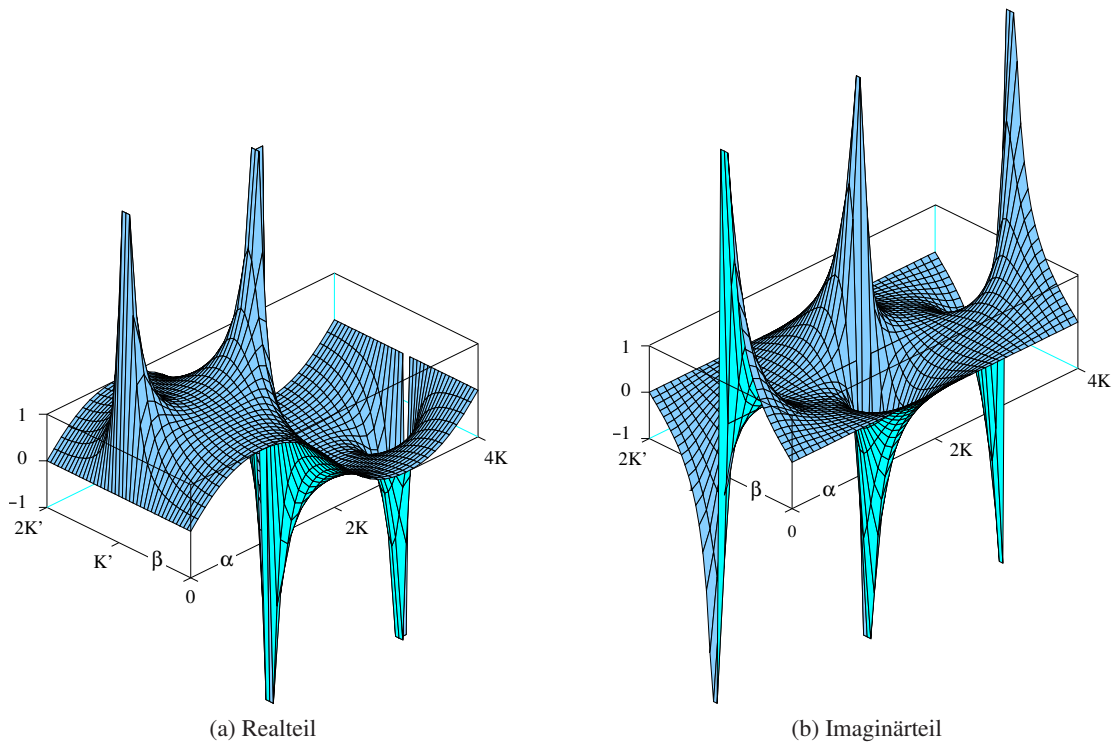


Abbildung 6: Eine Periode des elliptischen Sinus' $\text{sn}(\alpha + j\beta; k)$

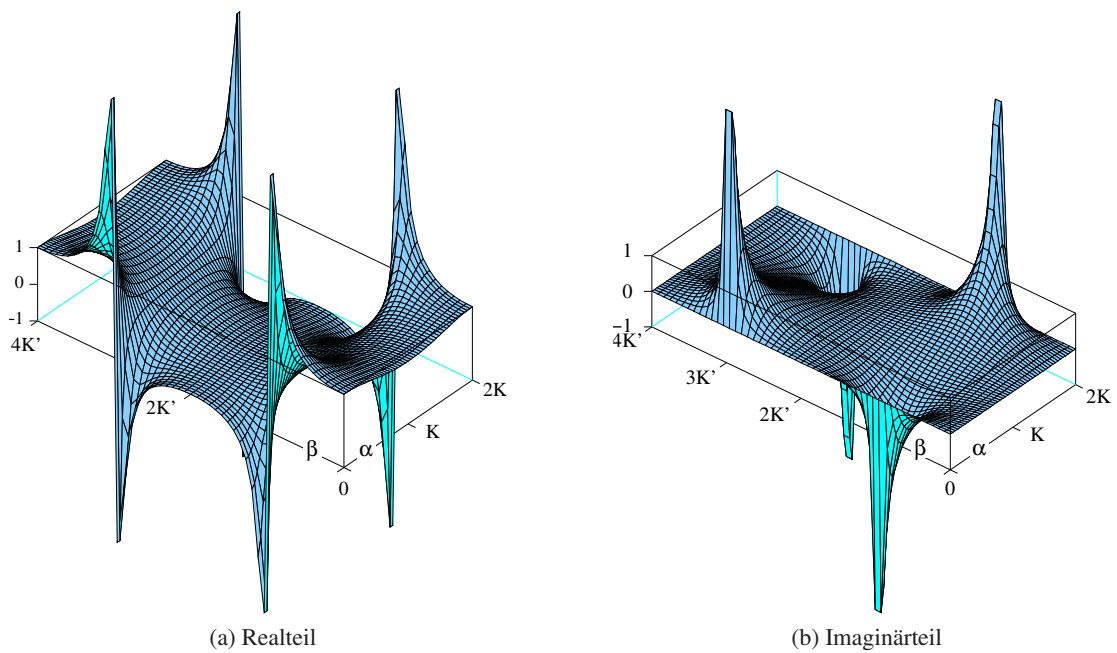


Abbildung 7: Eine Periode der elliptischen Delta-Amplitude $\text{dn}(\alpha + j\beta; k)$

3 Elliptische Funktionen

Tabelle 1: Pole und Nullstellen der elliptischen Basisfunktionen

Funktion	Nullstellen	Pole
$\operatorname{sn}(\alpha + j\beta; k)$	$2\gamma K + 2j\delta K'$	$2\gamma K + j(2\delta + 1)K'$
$\operatorname{cn}(\alpha + j\beta; k)$	$(2\gamma + 1)K + 2j\delta K',$ $2\gamma K + j(2\delta + 1)K'$	$2\gamma K + j(2\delta + 1)K'$
$\operatorname{dn}(\alpha + j\beta; k)$	$(2\gamma + 1)K + j(2\delta + 1)K'$	$2\gamma K + j(2\delta + 1)K'$

Aus Zähler und Nenner in den Beziehungen 62, 63 sowie 61 kann man direkt auf die entsprechenden Pole und Nullstellen der elliptischen Basisfunktionen schließen. Tabelle 1 gibt einen Überblick zu deren Lage, wobei immer $\gamma, \delta \in \mathbb{Z}$ gelten soll.

In der Transformationstheorie der Jacobi'schen elliptischen Funktionen (siehe Abschnitt 4) sind insbesondere die Werte auf dem Gitter $\gamma K + j\delta K'$ interessant. Hervorzuheben sind dabei die folgenden Beziehungen:

$$\operatorname{sn}(K + ju; k) = \operatorname{nd}(u; k') \quad (64)$$

Beweis. Aus Gleichung 62 ergibt sich sofort

$$\begin{aligned} \operatorname{sn}(K + ju; k) &= \frac{\operatorname{dn}(u; k')}{\operatorname{cn}^2(u; k') + k^2 \operatorname{sn}^2(u; k')} \\ &= \frac{\operatorname{dn}(u; k')}{1 - k'^2 \operatorname{sn}^2(u; k')} \\ &= \frac{1}{\operatorname{dn}(u; k')} = \operatorname{nd}(u; k') \end{aligned}$$

□

$$\operatorname{sn}(u + jK'; k) = k^{-1} \operatorname{ns}(u; k) \quad (65)$$

Beweis. Es handelt sich hierbei um einen weiteren Trivialfall von Gleichung 62 mit $\operatorname{cn}(\beta; k') = 0$ und $\operatorname{sn}(\beta; k') = 1$.

¹⁶Im Gegensatz zu den trigonometrischen Funktionen und der Exponentialfunktion, die immer nur für die eine oder andere Art von Argumenten diese Eigenschaft aufweisen.

¹⁷Wobei der allen gemeinsame Nenner $\operatorname{cn}^2(\beta; k') + k^2 \operatorname{sn}^2(\alpha; k) \cdot \operatorname{sn}^2(\beta; k')$ auch als $1 - k^2 \operatorname{sn}^2(\beta; k') \cdot \operatorname{cn}^2(\alpha; k)$ dargestellt werden kann.

¹⁸Sehr schöne Darstellungen (inklusive der des elliptischen Cosinus') sind auch in [JE52, VI, Abb. 49 ff.] zu finden.

3 Elliptische Funktionen

$$\begin{aligned}\operatorname{sn}(u + jK'; k) &= \frac{\operatorname{sn}(u; k)\operatorname{dn}(K'; k')}{k^2\operatorname{sn}^2(u; k)\operatorname{sn}^2(K'; k')} \\ &= \frac{\operatorname{sn}(u; k)}{k\operatorname{sn}^2(u; k)} \\ &= \frac{1}{k\operatorname{sn}(u; k)} = k^{-1}\operatorname{ns}(u; k)\end{aligned}$$

□

Insbesondere ergibt sich hieraus

$$\operatorname{sn}(K + jK'; k) = k^{-1} \quad (66)$$

und somit für das unvollständige elliptische Integral an der Stelle $x = k^{-1}$ bezüglich Definitionsgleichung 5

$$F\left(\frac{1}{k}; k\right) = K + jK'.$$

$$\operatorname{sn}(u + K + jK'; k) = k^{-1}\operatorname{nc}(u; k) \quad (67)$$

Beweis. Dieser Fall ergibt sich aus dem vorherigen, indem man $u := u + K$ setzt.

$$\begin{aligned}\operatorname{sn}(u + K + jK'; k) &= \frac{1}{k\operatorname{sn}(u + K; k)} \\ &= \frac{1}{k\operatorname{cn}(u; k)}\end{aligned}$$

□

$$\operatorname{dn}(u + K + jK'; k) = jk' \tan \varphi \quad (68)$$

Beweis. Aus dem Additionstheorem 61 kann man sofort ableiten

$$\begin{aligned}\operatorname{dn}(u + K + jK'; k) &= jk' \operatorname{sc}(u; k) \\ &= jk' \frac{\operatorname{sn}(u; k)}{\operatorname{cn}(u; k)}\end{aligned}$$

3 Elliptische Funktionen

Tabelle 2: Elliptischer Sinus auf dem Gitter $\eta K + j\zeta K'$

η	ζ	u	$\text{sn}(\eta K + j\zeta K' + u; k)$
gerade	gerade	imaginär ($u = jv$)	$j(-1)^{\eta/2} \text{sc}(v; k')$
ungerade	gerade	imaginär ($u = jv$)	$(-1)^{\eta/2} \text{nd}(v; k')$
gerade	gerade	reell	$(-1)^{\eta/2} \text{sn}(u; k)$
gerade	ungerade	reell	$(-1)^{\eta/2} k^{-1} \text{ns}(u; k)$

und dann mittels Definitionsgleichung 30 den Nachweis abschließen.

$$\text{dn}(u + K + jK'; k) = jk' \frac{\sin \varphi}{\cos \varphi} = jk' \tan \varphi$$

□

In Tabelle 2 sind die (insbesondere für die elliptischen Modultransformationen, vgl. Abschnitt 4) interessanten Beziehungen für den elliptischen Sinus zusammengefaßt.

3.12 Änderung des Arguments

In diesem Abschnitt sollen noch einige Formeln für den Übergang auf andere Argumente genannt (und teilweise auch abgeleitet) werden. Eine komprimierte Übersicht zu den interessanten Fällen enthält Tabelle 3, eine vollständige Tabellierung für alle elliptischen Funktionen ist in [AS72, 16.8] zu finden.

Alle Formeln in Tabelle 3 ergeben sich direkt aus den Additionstheoremen 40, 45 und 46 sowie den Gleichungen für komplexe Argumente, wenn man jeweils die um K bzw. K' verschobenen Argumente betrachtet. Aus den Beziehungen in Tabelle 3 für die gilt $\text{sn}(u + 2\omega) = \text{sn} u$ (beispielhaft für sn), ist sofort die reelle, imaginäre und komplexe Periode der elliptischen Basisfunktionen ersichtlich (siehe Tabelle 4 sowie Abbildungen 6 und 7).

Folgende spezielle (komplexe) Werte ergeben sich außerdem aus verschiedenen Fällen in Tabelle 3.

$$\begin{array}{lll}
 \text{sn}(jK'; k) = \infty & \text{cn}(jK'; k) = -j\infty & \text{dn}(jK'; k) = -j\infty \\
 \text{sn}(j2K'; k) = 0 & \text{cn}(j2K'; k) = -1 & \text{dn}(j2K'; k) = -1 \\
 \text{sn}(K + jK'; k) = \frac{1}{k} & \text{cn}(K + jK'; k) = -j\frac{k'}{k} & \text{dn}(K + jK'; k) = 0 \\
 \text{sn}(2K + 2jK'; k) = 0 & \text{cn}(2K + 2jK'; k) = 1 & \text{dn}(2K + 2jK'; k) = -1
 \end{array}$$

3 Elliptische Funktionen

Tabelle 3: Elliptische Funktionen bei Änderung des Arguments

$v =$	$\operatorname{sn}(v; k)$	$\operatorname{cn}(v; k)$	$\operatorname{dn}(v; k)$
$-u$	$-\operatorname{sn}(u; k)$	$\operatorname{cn}(u; k)$	$\operatorname{dn}(u; k)$
$u + K$	$\frac{\operatorname{cn}(u; k)}{\operatorname{dn}(u; k)}$	$-k' \frac{\operatorname{sn}(u; k)}{\operatorname{dn}(u; k)}$	$\frac{k'}{\operatorname{dn}(u; k)}$
$u - K$	$-\frac{\operatorname{cn}(u; k)}{\operatorname{dn}(u; k)}$	$k' \frac{\operatorname{sn}(u; k)}{\operatorname{dn}(u; k)}$	$\frac{k'}{\operatorname{dn}(u; k)}$
$K - u$	$\frac{\operatorname{cn}(u; k)}{\operatorname{dn}(u; k)}$	$k' \frac{\operatorname{sn}(u; k)}{\operatorname{dn}(u; k)}$	$\frac{k'}{\operatorname{dn}(u; k)}$
$u + 2K$	$-\operatorname{sn}(u; k)$	$-\operatorname{cn}(u; k)$	$\operatorname{dn}(u; k)$
$u - 2K$	$-\operatorname{sn}(u; k)$	$-\operatorname{cn}(u; k)$	$\operatorname{dn}(u; k)$
$2K - u$	$\operatorname{sn}(u; k)$	$-\operatorname{cn}(u; k)$	$\operatorname{dn}(u; k)$
$u + jK'$	$\frac{1}{k \operatorname{sn}(u; k)}$	$-j \frac{\operatorname{dn}(u; k)}{k \operatorname{sn}(u; k)}$	$-j \frac{\operatorname{cn}(u; k)}{\operatorname{sn}(u; k)}$
$u + 2jK'$	$\operatorname{sn}(u; k)$	$-\operatorname{cn}(u; k)$	$-\operatorname{dn}(u; k)$
$u + K + jK'$	$\frac{\operatorname{dn}(u; k)}{k \operatorname{cn}(u; k)}$	$-j \frac{k'}{k \operatorname{cn}(u; k)}$	$j k' \frac{\operatorname{sn}(u; k)}{\operatorname{cn}(u; k)}$
$u + 2K + 2jK'$	$-\operatorname{sn}(u; k)$	$\operatorname{cn}(u; k)$	$-\operatorname{dn}(u; k)$
$u + 4K + 4jK'$	$\operatorname{sn}(u; k)$	$\operatorname{cn}(u; k)$	$\operatorname{dn}(u; k)$

Tabelle 4: Perioden der elliptischen Basisfunktionen [AS72, 16.2]

Funktion	Reelle	Imaginäre	Komplexe
	Periode		
sn	$4K$	$2jK'$	$4K + j4K'$
cn	$4K$	$4jK'$	$2K + j2K'$
dn	$2K$	$4jK'$	$4K + j4K'$

4 Modultransformationen

4.1 Einführung

Die Transformationstheorie der Jacobi'schen elliptischen Funktionen und Integrale befaßt sich mit den rationalen, algebraischen Lösungen $y = f(x; k)$ der Differentialgleichung

$$\frac{M dy}{\sqrt{(1-y^2)(1-\lambda^2 y^2)}} = \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2 x^2)}}. \quad (69)$$

Wie noch zu sehen sein wird, ist dieses Problem eng verknüpft mit der Transformation der Jacobi'schen elliptischen Funktionen auf solche Module ($k \rightarrow \lambda, k' \rightarrow \lambda'$), die zu ganzzahligen Übersetzungen der Periodenverhältnisse führen ($\omega/\omega' \rightarrow \Omega/\Omega'$).

Die hier bevorzugte Betrachtungsweise ist (wie auch in [Jac29, § 20]) vor allem analytisch, da sie dem Leserkreis vertrauter sein dürfte. Wegen der Vielzahl der existierenden Transformationsformeln ist als praktische Referenz die tabellarische Zusammenfassung in [Ach70] empfehlenswert.

4.2 Problemstellung

Wie schon erwähnt ist es besonders Differentialgleichung 69, welche bezüglich der Transformationstheorie der elliptischen Funktionen eine zentrale Rolle spielt. Ihre äquivalente Schreibweise in der Legendre'schen Normalform¹⁹ ergibt sich, wenn man wieder die Substitutionen $x = \sin \varphi$ und $y = \sin \theta$ anwendet zu

$$\frac{M d\theta}{\sqrt{1-\lambda^2 \sin^2 \theta}} = \frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2 \sin^2 \varphi}}, \quad (70)$$

wobei M der sogenannte Multiplikator²⁰ und λ sowie k die Module sind.²¹

Es gilt also, eine Substitution $\theta = \Psi(\varphi; k)$ zu finden, welche diese Äquivalenz erfüllt [Cay76, § 219], [Ach70, § 34], [Tod84, § 5].²² Man kann das Problem auch so formulieren: Gesucht sind

¹⁹Für $k = \lambda = 0$ entspricht Gleichung 69 genau der Differentialgleichung, welche von den Weierstrass'schen Funktionen erster Art erfüllt wird.

²⁰Die Einführung eines Multiplikators ist bei den elliptischen Funktionen nach Jacobi deshalb erforderlich, weil (im Gegensatz zu den Weierstrass'schen Funktionen) reelle und imaginäre Periode nicht unabhängig voneinander sind.

²¹Solange man bei dieser differentiellen Darstellung bleibt, sind die Formeln 70 und 69 absolut gleichwertig. Erst beim Übergang zum (vollständigen oder auch unvollständigen) elliptischen Integral gilt es die entsprechenden Integrationsgrenzen zu berücksichtigen.

²²Es handelt sich anders gesagt um das Auffinden einer Invarianten $\Psi(\varphi)$, welche die elliptische Form des Differentials erhält.

4 Modultransformationen

die Integrale bzw. Lösungsfunktionen $y = f(x; k)$ der gewöhnlichen (impliziten) Differentialgleichung 69 erster Ordnung:²³

$$\frac{M dy}{\sqrt{(1-y^2)(1-\lambda^2 y^2)}} = \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2 x^2)}} \quad (71)$$

$$y' = \frac{1}{M} \sqrt{\frac{(1-y^2)(1-\lambda^2 y^2)}{(1-x^2)(1-k^2 x^2)}}$$

$$M^2 y'^2 (1-x^2)(1-k^2 x^2) - (1-y^2)(1-\lambda^2 y^2) = 0.$$

Das Finden der Integralkurve $y = f(x; k)$ ist (wie so oft) nicht einfach, hat man aber zwei Transformationsfunktionen f und g gefunden, dann kann man durch aufeinanderfolgende Anwendung der entsprechenden Beziehungen auch mindestens eine dritte Transformation angeben.

$$\begin{aligned} \frac{M dy}{\sqrt{(1-y^2)(1-\lambda^2 y^2)}} &= \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2 x^2)}}, & y &= f(x; k) \\ \frac{L dz}{\sqrt{(1-z^2)(1-\gamma^2 z^2)}} &= \frac{dy}{\sqrt{(1-y^2)(1-\lambda^2 y^2)}}, & z &= g(y; \lambda) \\ \frac{ML dz}{\sqrt{(1-z^2)(1-\gamma^2 z^2)}} &= \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2 x^2)}}, & z &= g(f(x; k); \lambda) \end{aligned}$$

Aus der letzten Gleichung wird sofort ersichtlich, daß der zugehörige Multiplikator das Produkt der beiden anderen Multiplikatoren M und L ist. Das Modul γ ist aus der Abhängigkeit von λ bekannt und kann durch die Beziehung $\lambda = \rho(k)$ auch als Funktion von k ausgedrückt werden.

Außerdem enthält jede Transformation nach Formel 69 auch gleichzeitig eine "Rücktransformation", wenn man die Umkehrfunktion f^{-1} nutzt. Zum besseren Verständnis (und aus Gründen der Lesbarkeit) soll $y_1 = x = f^{-1}(y) = f^{-1}(x_1)$, $x_1 = y$, $\lambda_1 = k$, $k_1 = \lambda$ gesetzt werden, was $dy_1 = dx$ und $dx_1 = dy$ bedeutet.

$$\begin{aligned} \frac{M dy}{\sqrt{(1-y^2)(1-\lambda^2 y^2)}} &= \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2 x^2)}} \\ \frac{dx_1}{\sqrt{(1-x_1^2)(1-k_1^2 x_1^2)}} &= \frac{M^{-1} dy_1}{\sqrt{(1-y_1^2)(1-\lambda_1^2 y_1^2)}} \end{aligned}$$

Die Umkehrfunktionen (der Transformationsbeziehung $y_1 = f^{-1}(x_1)$) als auch des Moduls $\lambda_1 = \rho^{-1}(k_1)$ enthalten also prinzipiell eine weitere Transformation, deren Multiplikator M^{-1} ist, wenn man im Sinne der eingeführten Größen die Richtung vertauscht.

²³Für φ, θ bedeutet dies $\sin \theta = f(\sin \varphi; k)$ und somit $\Psi(\varphi; k) = \arcsin[f(\sin \varphi; k)]$.

4.3 Rationale Lösung

Schon C.G.J. Jacobi hat in [Jac29] nachgewiesen, daß Lösungen der Differentialgleichung 70 algebraische Funktionen der Form $F(x, y) = 0$ sein können [Tri48, IV], [Hur00, II-5, § 4 ff.]. Für die implizite Darstellung solcher Funktionen wie folgt

$$F(x, y) = p_m(x)y^m + p_{m-1}(x)y^{m-1} + \dots + p_2(x)y^2 + p_1(x)y + p_0(x), \quad (72)$$

wobei $p_0, p_1, \dots, p_{m-1}, p_m$ Polynome in x sind, kann bekanntermaßen in bestimmten Spezialfällen eine explizite Lösungsformel $y = f(x)$ ermittelt werden. Bei dem gesuchten Integral $f(x)$ handelt es sich in den einfachsten Fällen um eine irrationale ($m = 2$) oder rationale Funktion ($m = 1$), wobei sich Letztere als

$$y = \frac{U(x)}{V(x)} \quad (73)$$

mit den Polynomen

$$U(x) = \sum_{\nu=0}^n a_{\nu} x^{\nu} = a_n \prod_{\nu=1}^n (x - x_{\nu})$$

$$V(x) = \sum_{\mu=0}^{n'} b_{\mu} x^{\mu} = b_{n'} \prod_{\mu=1}^{n'} (x - x_{\mu})$$

darstellen läßt.²⁴

Um für diesen Funktionstyp den Nachweis zu erbringen, daß es sich um eine Lösung von Differentialgleichung 70 handelt, folgen wir [Cay76, § 218 ff.] und setzen zuerst $U = U(x)$ bzw. $V = V(x)$ und bilden dann $\sqrt{(1-y^2)(1-\lambda^2 y^2)}$ sowie die Ableitung y' .

$$\sqrt{(1-y^2)(1-\lambda^2 y^2)} = \frac{\sqrt{(U^2 - V^2)(U^2 - \lambda^2 V^2)}}{V^2}$$

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{U'V - UV'}{V^2}$$

Dividiert man die Ableitung y' durch $\sqrt{(1-y^2)(1-\lambda^2 y^2)}$ entsteht der Ausdruck

$$\frac{dy}{\sqrt{(1-y^2)(1-\lambda^2 y^2)}} = \frac{U'V - UV'}{\sqrt{(U^2 - V^2)(U^2 - \lambda^2 V^2)}} dx \quad (74)$$

²⁴Man könnte dies wegen der Ähnlichkeit von Beziehung 70 mit der Differentialgleichung der Tschirnhaus'schen Funktionen erster Art $(1-x^2)[T'_n(x)]^2 = n^2[1-T_n^2(x)]$ vermuten, welche als Spezialfall entsteht, wenn $\lambda = k = 0$ gesetzt wird.

4 Modultransformationen

welcher ja letztlich der rechten Seite von Gleichung 69 (multipliziert mit M^{-1}) entsprechen soll.

$$\frac{U'V - UV'}{\sqrt{(U^2 - V^2)(U^2 - \lambda^2 V^2)}} = \frac{1}{M \sqrt{(1 - x^2)(1 - k^2 x^2)}}$$

Notwendige Voraussetzung dafür ist zuerst einmal, daß für den Grad der Polynome U und V die Einschränkung $|d| = |n - n'| \leq 1$ gilt, d. h. entweder beide Polynome sind vom Grad n (bzw. n') oder eines ist vom Grade n , das andere aber $n - 1$.²⁵

Beweis. Der Nachweis basiert auf der letzten Gleichung in folgender Darstellung

$$M^2(1 - x^2)(1 - k^2 x^2)(U'V - UV')^2 = (U^2 - V^2)(U^2 - \lambda^2 V^2)$$

und vergleicht einfach den Grad von links- und rechtsseitigem Polynom (mit entsprechender Fallunterscheidung).

$$\begin{aligned} 2(n + n' - 1) + 4 &= 4 \max(n, n') \\ n + n' + 1 &= \begin{cases} 2n & (n \geq n') \\ 2n' & (n' > n) \end{cases} \\ |n - n'| &= 1 \end{aligned} \tag{75}$$

Eine Funktion ist also vom Grad n , die andere vom Grad $n - 1$ und deshalb die Differenz $d = n - n' = \pm 1$. Allerdings ergeben sich dieselben Verhältnisse auch für $n = n'$ (also $d = 0$), denn in diesem Fall verschwindet der höchstwertige Koeffizient (mit Wert $a_n b_{n'} d$) in $U'V - UV'$. Verringert man entsprechend den linksseitigen Grad in Gleichung 75 um Eins (auf der rechten Seite bleibt alles wie gehabt), dann wird sofort erkennbar, daß auch $n = n'$ eine Lösungsmöglichkeit ist. □

Nimmt man nun an, daß sich in Gleichung 74 ein Faktor $(x - c)^2$ vom Ausdruck $(U^2 - V^2)(U^2 - \lambda^2 V^2)$ abspalten läßt, dann ist der Term $x - c$ in $U'V - UV'$ ebenfalls als Faktor enthalten.

Beweis. Ist $(x - c)^2$ ein Faktor (c eine doppelte Nullstelle) von $U^2 - V^2$ oder $U^2 - \lambda^2 V^2$, dann ist $(x - c)^2$ auch ein Faktor von $U - V$ oder $U + V$ bzw. $U - \lambda V$ oder $U + \lambda V$. Betrachten wir im weiteren nur den Fall, daß der Faktor $(x - c)^2$ in $U - V$ enthalten ist (gleiches gilt für die anderen Fälle). Es ergeben sich dann die Darstellungen

$$\begin{aligned} U^2 - V^2 &= (x - c)^2 Q(x) = (U - V)(U + V) \\ U - V &= (x - c)^2 P(x) \end{aligned}$$

²⁵Wie auch in [Cay76, § 219] sprechen wir jedoch immer von einer gebrochenen Funktion der Ordnung n .

4 Modultransformationen

mit den Ableitungen nach x

$$\begin{aligned} U' - V' &= 2(x-c)P(x) + (x-c)^2P'(x) = (x-c)[2P(x) + (x-c)P'(x)] \\ 2U'U - 2V'V &= 2(x-c)Q(x) + (x-c)^2Q'(x) = (x-c)[2Q(x) + (x-c)Q'(x)] . \end{aligned}$$

Bildet man jetzt

$$\begin{aligned} U'V - UV' &= (U' - V')(U + V) - (UU' - VV') \\ &= (U + V)(x-c)[2P(x) + (x-c)P'(x)] - (x-c)\left[Q(x) + \frac{x-c}{2}Q'(x)\right] \end{aligned}$$

dann bestätigt das gemeinsame Vorkommen des Faktors $x-c$ in allen Summanden unsere Annahme. \square

Setzt man eine solche Abspaltung für alle $2n-2$ Wurzeln von $U'V - UV'$ fort, dann bleibt in $(U^2 - V^2)(U^2 - \lambda^2V^2)$, dessen Grad ja $4n$ ist, ein Produktterm vom Grad 4 übrig, der nicht mehr gekürzt werden kann. Mit den konstanten Koeffizienten d_i ergibt sich demzufolge die Darstellung:²⁶

$$\begin{aligned} U'V - UV' &= C \prod_{l=1}^{2(n-1)} (x - c_l) = C \cdot T(x) \\ (U^2 - V^2)(U^2 - \lambda^2V^2) &= (d_4x^4 + d_3x^3 + d_2x^2 + d_1x + d_0) \prod_{l=1}^{2(n-1)} (x - c_l)^2 \\ &= (d_4x^4 + d_3x^3 + d_2x^2 + d_1x + d_0)T^2(x) . \end{aligned}$$

Kehrt man mit diesen Formeln zurück zur Ausgangsgleichung [74](#)

$$\begin{aligned} \frac{dy}{\sqrt{(1-y^2)(1-\lambda^2y^2)}} &= \frac{C \cdot T(x) dx}{\sqrt{(d_4x^4 + d_3x^3 + d_2x^2 + d_1x + d_0)T^2(x)}} \\ &= \frac{C dx}{\sqrt{d_4x^4 + d_3x^3 + d_2x^2 + d_1x + d_0}} \end{aligned}$$

und berücksichtigt außerdem, daß eine Überführung des besagten Produktterms in die Form $(1-x^2)(1-k^2x^2)$ immer möglich ist (siehe [[Tri48](#), II, § 3], [[WW27](#), § 20·54, §20·6]), dann ist mit einer rationalen Polynomfunktion $y = f(x)$ die elliptische Transformation nach Gleichung [70](#)

²⁶Mit der nicht einschränkenden Annahme, daß der Leitkoeffizient des Polynoms $U'V - UV'$ genau Eins ist.

4 Modultransformationen

möglich.²⁷ Aus dieser Feststellung heraus kann man bezüglich der Bestimmung der Koeffizienten von U und V noch die Bedingung

$$(U^2 - V^2)(U^2 - \lambda^2 V^2) = (1 - x^2)(1 - k^2 x^2)T^2(x)$$

formulieren.

4.4 Elliptische Lösung

Eine auf elliptischen Funktionen basierende Lösung der Differentialgleichung 70 ist ermittelbar, wenn man zu einer Parameterdarstellung mit Hilfe der neuen Variablen u übergeht.²⁸

$$\frac{M d\theta}{\sqrt{1 - \lambda^2 \sin^2 \theta}} = \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi}} = du$$

Integriert man nun beide Seiten und nimmt die Definitionsgleichung 29 der Amplitudenfunktion des elliptischen Sinus' (Gleichung 30) hinzu, so ergibt sich für x

$$u = F(\varphi; k) = \int_0^\varphi \frac{d\xi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \xi}} \quad (76)$$

$$\varphi = \operatorname{am}(u; k)$$

$$x = \sin \varphi = \operatorname{sn}(u; k).$$

In Gleichung 76 wurde auf die Einführung einer Integrationskonstante verzichtet, da man ohne wesentliche Einschränkung vom Funktionswert $u = 0$ für $\varphi = 0$ ausgehen kann.

Für y erhält man in gleicher Art und Weise

$$u = M \int_0^\theta \frac{d\xi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \xi}} - C = MF(\theta; \lambda) - C \quad (77)$$

$$\theta = \operatorname{am}\left(\frac{u-C}{M}; \lambda\right)$$

$$y = \sin \theta = \operatorname{sn}\left(\frac{u+C}{M}; \lambda\right),$$

wobei diesmal eine Integrationskonstante C berücksichtigt werden muß.

²⁷Man kann auch argumentieren, daß $U(x)$ und $V(x)$ so gewählt sein müssen, daß der verbleibende Produktterm genau der L-Form $(1 - x^2)(1 - k^2 x^2)$ und insofern dem Modul k entspricht.

²⁸Offen bleibt natürlich noch die Bestimmung des Multiplikators M und des Moduls λ .

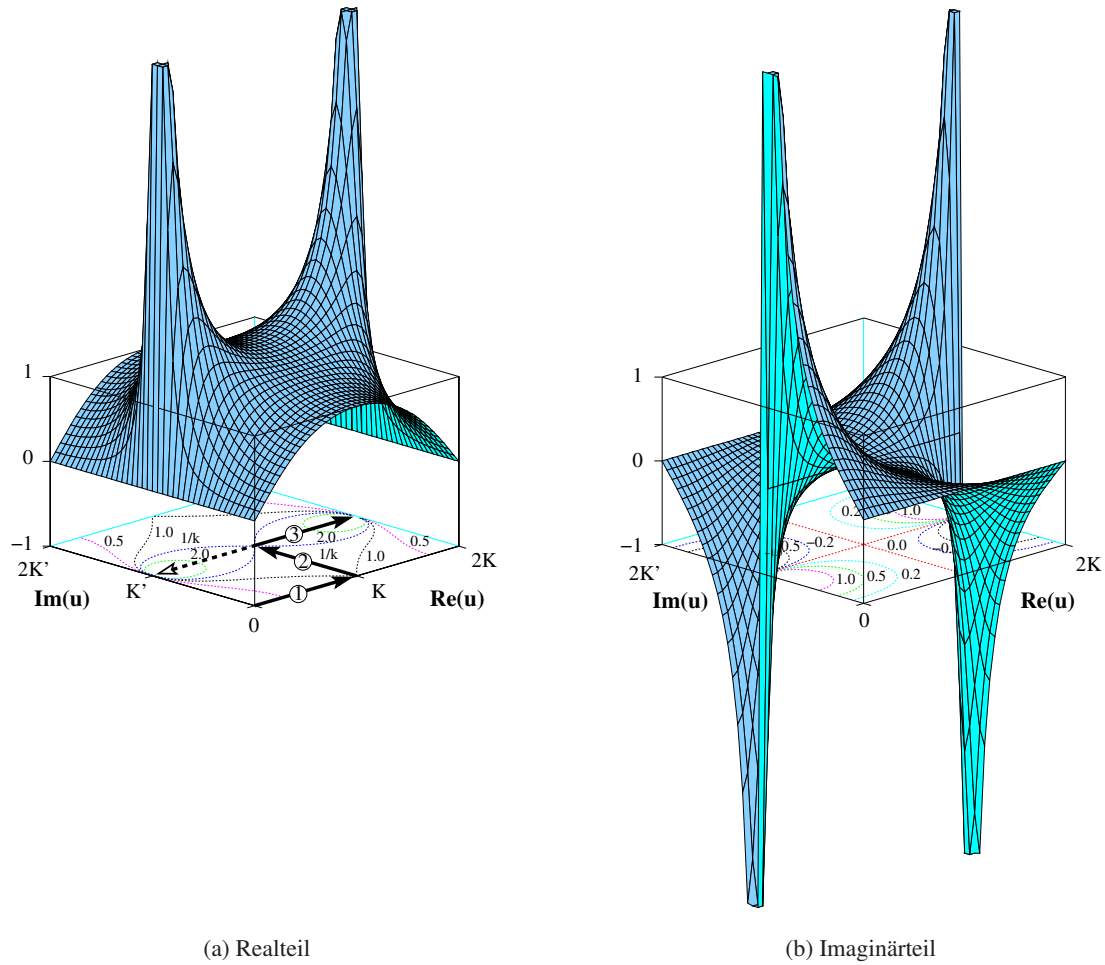


Abbildung 8: Elliptischer Sinus $\text{sn}[\text{Re}(u) + j \text{Im}(u); k]$ mit Parameterlinien

Fragt man sich nun, welche Werte der Parameter u grundsätzlich annehmen darf, damit x reell wird, dann ist ein Blick auf Abbildung 8 hilfreich. Sie zeigt noch einmal den Verlauf von sn für komplexe Argumente, wobei die zusätzlichen Parameterlinien anschaulich illustrieren,²⁹ daß x nur entlang der Geraden $u + j\beta K'$ für reelles u und $u + \alpha K$ für imaginäres u nicht komplex ist ($\alpha, \beta \in \mathbb{Z}$).

Mit diesem Wissen kann man bezüglich x den mit Pfeilen markierten “Wertepfad” in Abbildung 8a für das Argument u angeben. Dieser Weg garantiert zwar, daß x monoton Werte zwischen 0 und ∞ annimmt, jedoch sind weitere x -Werte möglich, wenn man die Periodizität des elliptischen Sinus’ berücksichtigt.

²⁹Um die weiteren Formeln etwas zu verkürzen sollen ab jetzt die folgenden Kurzschreibweisen vereinbart sein:
 $K = K(k)$ sowie $\Lambda = K(\lambda)$.

4 Modultransformationen

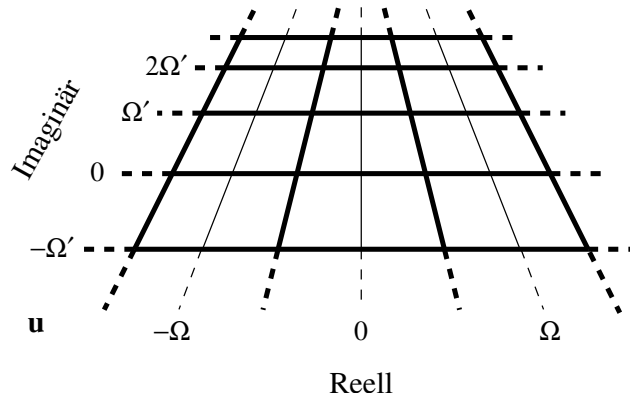


Abbildung 9: Gitter rein imaginärer/reeller Werte für y

Soll auch y (oder zumindest y^2) reell sein,³⁰ dann muß sich $u + C$ auf dem Gitter $\gamma M\Lambda + j\delta M\Lambda'$ ($\gamma, \delta \in \mathbb{Z}$) bewegen. Abbildung 9 illustriert dieses anschaulich, wobei folgende Definitionen für die reelle bzw. imaginäre Periode von x und y gelten sollen:³¹

$$\begin{aligned} 2\omega &= 4K & 2\omega' &= j2K' \\ 2\Omega &= 4M\Lambda & 2\Omega' &= j2M\Lambda' . \end{aligned}$$

Sinnvolle Werte für die Integrationskonstante C sind entsprechend nur $C = 0$ und $C = \pm M\Lambda$, wobei der Wert $\pm M\Lambda$ rein reelle Werte für y bei geradem γ ermöglicht.³² Auf der Grundlage dieser Betrachtungen, welche ja im Wesen auf der doppelten Periodizität des elliptischen Sinus' basieren, kann man (ohne etwas zu verändern) die Gleichungen 76 und 77 auch folgendermaßen schreiben:³³

$$\begin{aligned} x &= \operatorname{sn}(u + 2\alpha\omega + 2\beta\omega'; k) \\ y &= \operatorname{sn}\left(\frac{u + 2\gamma\Omega + 2\delta\Omega' - C}{M}; \lambda\right), \quad \alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{Z} . \end{aligned}$$

Soll gewährleistet sein, daß nur eine endliche Anzahl möglicher (unterschiedlicher) x -Werte zu einem bestimmten Wert y gehören (sowie umgekehrt),³⁴ dann muß man ausgehend von diesen

³⁰Reelle Werte für y sind Voraussetzung für eine rationale Lösung (vgl. Abschnitt 4.3), rein imaginäre Werte die einer irrationalen Lösung.

³¹Die reelle Viertelperiode für x (bezüglich u) ist bekanntlich die des elliptischen Sinus', also K , für y entsprechend $M\Lambda$. Der Multiplikator M wird an dieser Stelle als reell angenommen, im anderen (nicht ausgeschlossenen) Fall wären ω', Ω' reell bzw. ω, Ω imaginär.

³²Mit anderen Worten werden die ursprünglich rein imaginären Werte für y entlang der dünnen Linien in Abbildung 9 zu rein reellen Werten (dicke Linien).

³³Wegen der Symmetrieeigenschaft des elliptischen Sinus' $\operatorname{sn}(u + 2K; k) = -\operatorname{sn}(u; k)$ könnte man diese Beziehungen auch auf die reellen Argumente $u + 2\alpha K$ bzw. $u + 2\gamma M\Lambda'$ reduzieren.

³⁴Im Sinne der Forderung nach einer rationalen Lösungsfunktion entsprechend Gleichung 72.

4 Modultransformationen

Gleichungen die Periodenbedingung

$$\begin{aligned}u + 2\alpha\omega + 2\beta\omega' &= u + 2\gamma\Omega + 2\delta\Omega' \\ 2\alpha\omega + 2\beta\omega' &= 2\gamma\Omega + 2\delta\Omega'\end{aligned}$$

formulieren. Separiert man darin Real- und Imaginärteil, dann ergibt sich für den Fall eines reellen Multiplikators M

$$\begin{aligned}\alpha\omega &= \gamma\Omega \\ \beta\omega' &= \delta\Omega'\end{aligned}\tag{78}$$

und im einfachsten Fall, d. h. wenn $\alpha = \beta = 1$ gilt

$$\begin{aligned}K &= \gamma M \Lambda, & \gamma &\in \mathbb{Z} \\ K' &= \delta M \Lambda', & \delta &\in \mathbb{Z} \\ \frac{K}{K'} &= \frac{\gamma}{\delta} \cdot \frac{\Lambda}{\Lambda'}.\end{aligned}\tag{79}$$

Für den Fall eines ganzzahligen Verhältnisses γ/δ bzw. δ/γ , also eines Periodenverhältnisses der Form

$$\frac{K}{K'} = n \frac{\Lambda}{\Lambda'} \quad \text{oder} \quad \frac{K'}{K} = n \frac{\Lambda'}{\Lambda},\tag{80}$$

spricht man bezüglich der Beziehung zwischen k und λ von einer Modulgleichung vom Grad n .

Der Spezialfall $\gamma = n, \delta = 1$ wird dabei als die 1. elliptische Haupttransformation (n -te Teilung der reellen Periode), der Fall $\gamma = 1, \delta = n$ als 2. elliptische Haupttransformation (n -te Teilung der imaginären Periode) bezeichnet.

4.5 Die Transformationsfunktion

Hier sollen nun ausgewählte Eigenschaften der Transformationsfunktion $f(x; k)$ bzw. des Differentials (von Gleichung 69) ermittelt werden. Die charakteristischen Eigenschaften sollen später dazu dienen, Aussagen zur Form von $f(x; k)$ machen zu können.

Reziproke Argumente Im Zusammenhang mit reziproken Argumenten sei auf folgende bemerkenswerte Eigenschaft von $f(x; k)$ hingewiesen:

4 Modultransformationen

$$f\left(\frac{1}{kx}; k\right) = \frac{1}{\lambda f(x; k)}. \quad (81)$$

Beweis. Ersetzt man im Ausdruck $dx/\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}$ der Gleichung 69 die Variable x durch $1/kx_1$

$$x = \frac{1}{kx_1}, \quad dx = -\frac{dx_1}{kx_1^2},$$

dann ändert sich nur das Vorzeichen der rechten Seite.

$$\begin{aligned} \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}} &= -\frac{k dx_1}{k^2 x_1^2 \sqrt{(1-k^{-2}x_1^{-2})(1-k^2k^{-2}x_1^{-2})}} \\ &= -\frac{k dx_1}{\sqrt{(k^2 x_1^2 - 1)(k^2 x_1^2 - k^2)}} \\ &= -\frac{dx_1}{\sqrt{(1-x_1^2)(1-k^2x_1^2)}} \end{aligned}$$

Substituiert man nach der gleichen Methode nun auch y durch $1/\lambda y_1$, dann tritt auf der linken Seite ebenfalls (nur) eine Vorzeichenumkehr auf und die Differentialgleichung 69 ändert sich überhaupt nicht.³⁵ Folglich sind x_1 und y_1 ebenfalls durch $y_1 = f(x_1; k)$ verbunden und es gilt:

$$y = f\left(\frac{1}{kx_1}; k\right) = \frac{1}{\lambda y_1} = \frac{1}{\lambda f(x_1; k)},$$

d. h. die Transformationsfunktion f muß die Eigenschaft laut Gleichung 81 aufweisen. □

Funktionsverlauf Weitere Eigenschaften der Lösungsfunktion ergeben sich aus den Betrachtungen von Abschnitt 4.3 sowie 4.4. Dazu sei hier nocheinmal auf Abbildung 8a verwiesen, welche den Verlauf des Parameters u in der komplexen Ebene zeigt. Sie zeigt den Weg des Parameters u insbesondere für die elliptischen Haupttransformationen ($\gamma = n, \delta = 1$ bzw. $\gamma = 1, \delta = n$) sehr anschaulich. Für diese Fälle entarten die Gleichungen 76 und 77 auf den Wegabschnitten ② und ③ (vgl. Abschnitt 3.11).

Für den Fall $C = 0$ enthält Tabelle 5 eine Übersicht in Bezug auf den Verlauf von u nach Abbildung 8.

Auf Wegabschnitt ② determiniert γ (gerade/ungerade) welche Gleichung für y zutrifft, auf Abschnitt ③ ist es δ . Ist γ bzw. δ gerade, dann trifft jeweils Formel ① zu (irrationale Lösung), im anderen Fall ist es ② (rationale Lösung). Als spezielle Funktionswerte ergeben sich daraus

³⁵Diese Methode kann sehr günstig zur Bestimmung von λ für eine spezifische Transformation angewandt werden.

4 Modultransformationen

Tabelle 5: Funktionswerte x, y für $C = 0$

Weg	Re(u)	Im(u)	x	±y
1	$0 \leq \text{Re}(u) \leq K$	0	sn($u; k$)	sn($u/M; \lambda$)
2	K	$0 \leq \text{Im}(u) \leq K'$	nd [Im(u); k']	Ⓐ jsc [Im(u)/ $M; \lambda'$ Ⓑ nd [Im(u)/ $M; \lambda'$]
3	$K \leq \text{Re}(u) \leq 2K$	K'	k^{-1} ns [Re(u); k]	Ⓐ sn($u/M; \lambda$) Ⓑ λ^{-1} ns [Re(u)/ $M; \lambda$]

Tabelle 6: Funktionswerte x, y für $C = \Omega/2$

Re(u)	Im(u)	x	±y
$0 \leq \text{Re}(u) \leq K$	0	sn($u; k$)	cd($u/M; \lambda$)
K	$0 \leq \text{Im}(u) \leq K'$	nd(Im(u); k')	Ⓐ nd(Im(u)/ $M; \lambda'$) Ⓑ jsc(Im(u)/ $M; \lambda'$)
$K \leq \text{Re}(u) \leq 2K$	K'	k^{-1} ns(Re(u); k)	Ⓐ cd($u/M; \lambda$) Ⓑ λ^{-1} dc(Re(u)/ $M; \lambda$)

$$y = f(0; k) = 0$$

$$y = f(1; k) = \begin{cases} 0 & (|\gamma| = 0, 2, 4, \dots) \\ +1 & (|\gamma| = 1, 5, 9, \dots) \\ -1 & (|\gamma| = 3, 7, 11, \dots) \end{cases} \begin{cases} \text{Ⓐ} \\ \text{Ⓑ} \\ \text{Ⓑ} \end{cases} . \quad (82)$$

Eine wesentliche Schlußfolgerung der vorangegangenen Ausführungen sowie der Gleichungen in Tabelle 5 ist die, daß $f(x; k)$ in diesem Fall eine ungerade Funktion sein muß.

Der Fall $C = \pm M\Lambda$ führt zu einer Verschiebung von y entlang der reellen Achse, wodurch $y = f(x; k)$ zu einer geraden Funktion wird. Mit Hilfe der Verschiebungsrelationen nach Tabelle 3 kann man auch hier eine Übersicht angeben, welche Tabelle 6 präsentiert. Ist γ bzw. δ gerade, dann trifft jeweils Formel Ⓐ zu, im anderen Fall ist es Ⓑ.

Als spezielle Funktionswerte ergeben sich hier:

$$y = f(0; k) = 1$$

$$y = f(1; k) = \begin{cases} 0 & (|\gamma| = 1, 3, 5, \dots) \\ +1 & (|\gamma| = 0, 4, 8, \dots) \\ -1 & (|\gamma| = 2, 6, 10, \dots) \end{cases} \begin{cases} \text{Ⓑ} \\ \text{Ⓐ} \\ \text{Ⓐ} \end{cases} . \quad (83)$$

Rationale Lösungen Mit den soeben gewonnen Erkenntnissen kann man die rationale Lösung nach Formel 73 konkretisieren.

4 Modultransformationen

$$y = \begin{cases} x \frac{u(x^2)}{v(x^2)} & (C = 0; \gamma \text{ ungerade}) \\ \frac{u(x^2)}{v(x^2)} & (C = M\Lambda; \gamma \text{ gerade}) \end{cases} \quad (84)$$

Herangezogen wurden dazu all die Fälle, welche in den Tabellen 6 und 5 rein reelle Funktionsverläufe erzeugen, also

- γ ungerade für $C = 0$ (ungerade Funktion)
- und γ gerade für $C = M\Lambda$ (gerade Funktion).

Nun soll noch nachgewiesen werden, daß die Koeffizienten a_ν und b_μ der Polynome $U(x)$ und $V(x)$ der rationalen Lösung nach Gleichung 73 nicht unabhängig voneinander, sondern durch folgenden Relation verbunden sind.

$$\begin{aligned} x_\mu &= \frac{1}{k x_\nu} \\ x_\nu x_\mu &= \frac{1}{k} \end{aligned} \quad (85)$$

Beweis. Um diese Beziehung einfach zu begründen soll unser Augenmerk der Linearfaktordarstellung von $U(x)$ und $V(x)$ mittels der Polstellen x_μ und Nullstellen x_ν gelten. Im ersten Schritt wird dazu $f(1/kx; k)$ gebildet.

$$\begin{aligned} f\left(\frac{1}{kx}; k\right) &= \frac{a_n \prod_{\nu=1}^n [(kx)^{-1} - x_\nu]}{b_{n'} \prod_{\mu=1}^{n'} [(kx)^{-1} - x_\mu]} \\ &= (kx)^{-d} \frac{a_n \prod_{\nu=1}^n (1 - kx_\nu x)}{b_{n'} \prod_{\mu=1}^{n'} (1 - kx_\mu x)} \end{aligned}$$

Nach Gleichung 81 und wegen $x_{n-1} = 0$ muß nun gelten

$$\begin{aligned} f\left(\frac{1}{kx}; k\right) &= \frac{1}{\lambda f(x; k)} \\ (kx)^{-d} \frac{a_n \prod_{\nu=1}^n (1 - kx_\nu x)}{b_{n'} \prod_{\mu=1}^{n'} (1 - kx_\mu x)} &= \frac{b_{n'} \prod_{\mu=1}^{n'} (x - x_\mu)}{\lambda a_n \prod_{\nu=1}^n (x - x_\nu)}. \end{aligned} \quad (86)$$

4 Modultransformationen

Setzt man im Zähler die speziellen Werte $x = k^{-1}x_{\nu}^{-1}$, dann müssen sowohl links- als auch rechtsseitiger Ausdruck verschwinden.³⁶

$$\begin{aligned} x - x_{\mu} &= 0 \\ x_{\mu} &= \frac{1}{kx_{\nu}} \end{aligned}$$

Sind die Pole x_{μ} aber schon durch die Nullstellen x_{ν} determiniert, dann hängen auch die Koeffizienten b_{μ} von a_{ν} ab. □

Aus Gleichung 86 kann man, wenn andere spezielle Werte wie z. B. $x = 1$ eingesetzt werden, auch das Modul λ bestimmt werden.

$$\lambda = k^d \frac{b_{n'}}{a_n} \sqrt{\frac{\prod_{\mu=1}^{n'} (1 - x_{\mu})(1 - kx_{\mu})}{\prod_{\nu=1}^{n-1} (1 - x_{\nu})(1 - kx_{\nu})}}$$

4.6 Transformationen erster Ordnung

Eine tabellarische Übersicht der Transformationen erster Ordnung sowie der geeigneten Substitutionen ist unter anderem in [Tri48, IV, § 2] zu finden. Wir beschränken uns hier auf zwei wichtige Transformationen – J’s reelle sowie imaginäre Transformation.

4.6.1 Imaginäre Transformation

Die imaginäre Transformation wurde in Bezug auf das elliptische Integral erster Art schon in Abschnitt 2.1, für den elliptischen Sinus in Abschnitt 3.10 behandelt. Um die Parameter M und λ aus der allgemeinen Gleichung 70 zu ermitteln, ist ein Blick auf Beziehung 18 notwendig.

$$F(\varphi; k) = jF[\arctan(\sinh j\varphi); k']$$

Diese Gleichung ist nun der folgenden speziellen Ausprägung von Differentialgleichung 70

$$\frac{d\varphi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi}} = j \frac{d\theta}{\sqrt{1 - k'^2 \sin^2 \theta}} \tag{87}$$

³⁶Für den Nenner kann man eine äquivalente Bedingung $x = 1/kx_{\mu}$ wählen, die aber zum gleichen Ergebnis führt.

4 Modultransformationen

mit der Substitution nach Gleichung 19

$$\begin{aligned}\theta &= \arctan[\sinh(j\varphi)] \\ &= j \operatorname{artanh}(\sin \varphi)\end{aligned}\tag{88}$$

$$\varphi = -j \operatorname{arsinh}(\tan \theta)\tag{89}$$

äquivalent. Aus der spezifischen Beziehung 87 kann man durch Vergleich mit Differentialgleichung 70 sofort den Multiplikator und die zugeordnete Modulgleichung (vom Grad Eins) ablesen.

$$M = j, \quad \lambda = k' \quad (\lambda' = k)$$

Die Bestimmung des Periodenverhältnisses ist mit diesen Werten kein Problem mehr.

$$\frac{K}{K'} = \frac{K(k)}{K(k')} = \frac{K(\lambda')}{K(\lambda)} = \frac{\Lambda'}{\Lambda}\tag{90}$$

Die rationale Beziehung zwischen x und y ist schon in der Substitution 19 enthalten, wenn man (wie immer) Gleichung 76 sowie 77 berücksichtigt.

$$\begin{aligned}\sin \varphi &= j \tan \theta = j \frac{\sin \theta}{\sqrt{1 - \sin^2 \theta}} \\ x &= j \frac{y}{\sqrt{1 - y^2}} \\ y &= j \frac{x}{\sqrt{1 - x^2}}\end{aligned}$$

4.6.2 Reelle Transformation

J's reelle Transformation nach folgender Gleichung

$$\operatorname{sn}(u; k) = \frac{1}{k} \operatorname{sn}\left(ku; \frac{1}{k}\right)\tag{91}$$

ermöglicht es, bei allen elliptischen Funktionen auch Module $k > 1$ zuzulassen.

4 Modultransformationen

Beweis. Ausgehend vom Argument des Integrals $F(\varphi; k)$

$$\frac{d\varphi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi}}$$

nimmt man die Substitution $\sin \theta = k \sin \varphi$, welche ja eine algebraische Beziehung erster Ordnung, nämlich $y = kx$ verkörpert, vor. Mit der Ableitung $d\theta/d\varphi = k \cos \varphi / \cos \theta$ erhält man wieder die typische Differentialgleichung

$$\begin{aligned} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi}} &= \frac{1}{k} \cdot \frac{\cos \theta d\theta}{\cos \varphi \sqrt{1 - \sin^2 \theta}} \\ &= \frac{1}{k} \cdot \frac{d\theta}{\cos \varphi} \\ &= \frac{1}{k} \cdot \frac{d\theta}{\sqrt{1 - k^{-2} \sin^2 \theta}} \end{aligned} \tag{92}$$

aus welcher nur noch die Parameter M und λ konform zu Gleichung 70 abgelesen werden müssen. □

$$M = \frac{1}{k}, \quad \lambda = \frac{1}{k}$$

Beweis. Mit den allgemeinen Beziehungen 76 und 77 sowie der vorgenommenen Substitution $\sin \varphi = k^{-1} \sin \theta$ ist der abschließende Beweis möglich.

$$\operatorname{sn}(u; k) = \sin \varphi = \frac{\sin \theta}{k} = \frac{1}{k} \operatorname{sn}\left(\frac{u}{M}; \lambda\right) = \frac{1}{k} \operatorname{sn}\left(ku; \frac{1}{k}\right)$$

□

4.7 Quadratische Transformationen

Quadratische Transformationen sind durch eine Modulgleichung vom Grad $n = 2$ bestimmt,³⁷ also durch Periodenverhältnisse wie z. B.

³⁷Eine schöne tabellarische Übersicht aller 18 quadratischen Transformationen in ihrer Standardform ist in [Cay76, § 252, § 478 ff.] zu finden.

$$\frac{K}{K'} = 2 \frac{\Lambda}{\Lambda'} . \quad (93)$$

4.7.1 LANDEN-Transformation

Die L -Transformation ist wahrscheinlich der bekannteste Vertreter aller quadratischen Transformationen [AS72, 17.5], [WW27, § 22-42], [Ach70, § 38], [Cay76, § 254], [Tri48, IV, § 7], [Hur00, II-7, § 5]. Sie ist gekennzeichnet durch die “Periodenbeziehungen”

$$K = 2M\Lambda, \quad jK' = jM\Lambda' \quad (94)$$

welche eine Teilung der ersten (also reellen) Periode durch zwei anzeigen.³⁸

Transformationsbeziehung Die mit Gleichung 94 verbundenen Transformationsbeziehungen sind:³⁹

$$\operatorname{sn}\left(\frac{u}{M}; \lambda\right) = \frac{(1+k') \operatorname{sn}(u; k) \operatorname{cn}(u; k)}{\operatorname{dn}(u; k)} \quad (95)$$

$$\lambda = \frac{1-k'}{1+k'} < k \quad (96)$$

$$M = \frac{1}{1+k'} . \quad (97)$$

Beweis. Beschränkt man sich auf die Periodenrechtecke um den Koordinatenursprung dann liegen die Nullstellen von $\operatorname{sn}(u/M; \lambda)$ bekanntlich bei $u_\xi = 0, \pm 2M\Lambda$, was nach den Periodenverhältnissen laut Gleichung 94 äquivalent zu $u_\xi = 0, \pm K$ ist. Demzufolge liegen die Nullstellen bezüglich x bei $x_\xi = 0, \pm 1$. In gleicher Art und Weise ergibt sich für die Pole $u_x = 2M\Lambda \pm jM\Lambda' = K \pm jK'$ und entsprechend für x

$$x_x = \operatorname{sn}(K \pm jK'; k) = \frac{1}{k} .$$

In Bezug auf den allgemeinen Lösungsansatzes muß es sich für $y = f(x; k)$ also um eine Beziehung der Form

³⁸Deshalb wird diese Transformation auch als reelle Multiplikation der Periodenverhältnisse bezeichnet.

³⁹Ein sehr eleganter Beweis von Formel 95 mit Hilfe der Theta-Funktionen ist in [WW27] zu finden. Auch eine geometrische Interpretation der Transformationsbeziehung 95 ist möglich, vgl. [Tri48, IV, § 7], [Cay76, § 420].

4 Modultransformationen

$$y^2 = A^2 x^2 \frac{1-x^2}{1-k^2 x^2} \quad (98)$$

handeln. Um nun die Werte für den Multiplikator M , das Modul λ sowie A zu bestimmen ist es günstig in beiden Lösungsansätzen das Verhältnis y/x zu bilden und dann gleichzusetzen.

$$A \sqrt{\frac{1-x^2}{1-k^2 x^2}} = \frac{\operatorname{sn}(u/M; \lambda)}{\operatorname{sn}(u; k)} \quad (99)$$

Setzt man nun noch die drei ausgewählten Werte $u = K/2$, $u = 0$ und $u = jK'$ ein, dann sind die (ebenfalls drei) Unbekannten leicht zu bestimmen. \square

1. An der Stelle $u = K/2 = M\Lambda$ nimmt nach Gleichung 38 der elliptische Sinus (und demzufolge auch x) den Wert $(1+k')^{-1/2}$ an und es gilt

$$A \sqrt{\frac{k'}{1+k'-k^2}} = \sqrt{1+k'}$$

$$A = 1+k'.$$

- a) Setzt man nun den Wert $u = 0$ und folglich auch $x = 0$ in Gleichung 99 ein, dann wird wegen der Unbestimmtheit des rechtsseitigen Ausdrucks eine Grenzwertbestimmung nach der Regel von B - 'H notwendig.

$$\begin{aligned} A &= \lim_{u \rightarrow 0} \frac{\operatorname{sn}(u/M; \lambda)}{\operatorname{sn}(u; k)} \\ &= \lim_{u \rightarrow 0} \frac{\operatorname{sn}'(u/M; \lambda)}{\operatorname{sn}'(u; k)} \\ &= \frac{1}{M} \lim_{u \rightarrow 0} \frac{\operatorname{cn}(u/M; \lambda) \operatorname{dn}(u/M; \lambda)}{\operatorname{cn}(u; k) \operatorname{dn}(u; k)} \\ &= \frac{1}{M} \end{aligned}$$

- b) Den dritten Wert $u = jK' = jM\Lambda'$ kann man beim rechtsseitigen Grenzübergang auf den vorhergehenden Fall zurückführen, wenn $\operatorname{sn}(u + jK'; k) = k^{-1} \operatorname{ns}(u; k)$ bzw. $\operatorname{sn}(u/M + j\Lambda'; \lambda) = \lambda^{-1} \operatorname{ns}(u/M; \lambda)$ nach Tabelle 3 beachtet wird. Um auch den linksseitigen Grenzwert ermitteln zu können, sind vorbereitend noch Zähler und Nenner

4 Modultransformationen

durch x zu dividieren.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \infty} A \sqrt{\frac{x^{-2}-1}{x^{-2}-k^2}} &= \lim_{u \rightarrow jK'} \frac{\operatorname{sn}(u/M; \lambda)}{\operatorname{sn}(u; k)} \\ \frac{1}{kM} &= \lim_{u \rightarrow 0} \frac{\operatorname{sn}(u + j\Lambda'; \lambda)}{\operatorname{sn}(u + jK'; k)} \\ kM &= \frac{\lambda}{k} \lim_{u \rightarrow 0} \frac{\operatorname{sn}(u/M; \lambda)}{\operatorname{sn}(u; k)} \\ kM &= \frac{\lambda}{kM} \\ \lambda &= k^2 M^2 = \frac{(1-k')(1+k')}{(1+k')^2} = \frac{1-k'}{1+k'} \end{aligned}$$

Eine weitere interessante Darstellung der Transformationsbeziehung ist möglich, wenn man die Verschiebungsrelation $\operatorname{sn}(u + K; k) = \operatorname{cd}(u; k)$ zu Hilfe nimmt.

$$\operatorname{sn}\left(\frac{u}{M}; \lambda\right) = (1+k')\operatorname{sn}(u; k)\operatorname{sn}(u + K; k)$$

In äquivalenter Art und Weise kann auch die folgende Formel abgeleitet werden, wenn man die Periodenbeziehungen 94 der L-Transformation berücksichtigt.

$$\operatorname{sn}\left(\frac{u}{M} - \Lambda; \lambda\right)\operatorname{sn}\left(\frac{u}{M} + \Lambda; \lambda\right) = -\left[(1+k')\operatorname{sn}\left(u + \frac{K}{2}; k\right)\operatorname{sn}\left(u - \frac{K}{2}; k\right)\right]^2$$

Funktionsverlauf Der Verlauf der Transformationsbeziehung $y = f(x; k)$ entsprechend Gleichung 98

$$y = (1+k')x \sqrt{\frac{1-x^2}{1-k^2x^2}}. \quad (100)$$

ist in Abbildung 10 grafisch dargestellt.

Im Gegensatz dazu zeigen die einzelnen Bilder in Abbildung 11 die äquivalente Parameterdarstellung nach Gleichung 76 und 77. Der Parameter u läuft wieder auf dem Wegabschnitt ① in Abbildung 8a von 0 nach K , dann auf dem Teilstück ② bis $K + jK'$ und zuletzt bis zum Punkt $2K + jK'$ (bzw. rückwärts nach jK').

Das Modul λ Um eine Vorstellung vom Verlauf der Modulgleichung $\lambda = \rho(k)$ zu bekommen, wurde Formel 96 in Abbildung 12 grafisch dargestellt.⁴⁰

⁴⁰Wegen $k > \lambda$ wird diese Darstellung auch als *aufsteigende* L-Transformation bezeichnet (das Modul auf der rechten Seite der Gleichung ist größer als das auf der linken). Aus der Definitionsgleichung 1 des komplementären Moduls ergibt sich folgerichtig $\lambda' > k'$.

4 Modultransformationen

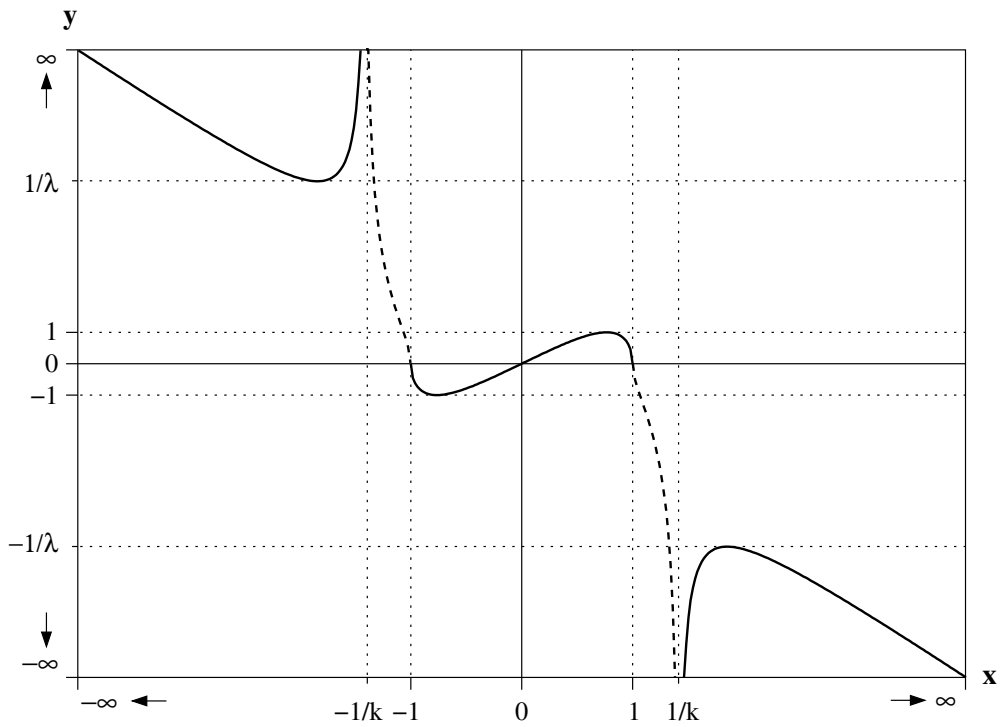


Abbildung 10: Lösung der L-Transformation $y = f(x; k)$

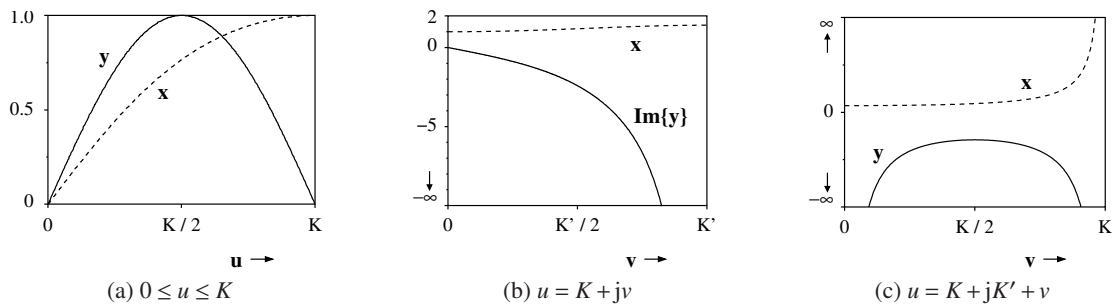


Abbildung 11: L-Transformation in Parameterdarstellung

4 Modultransformationen

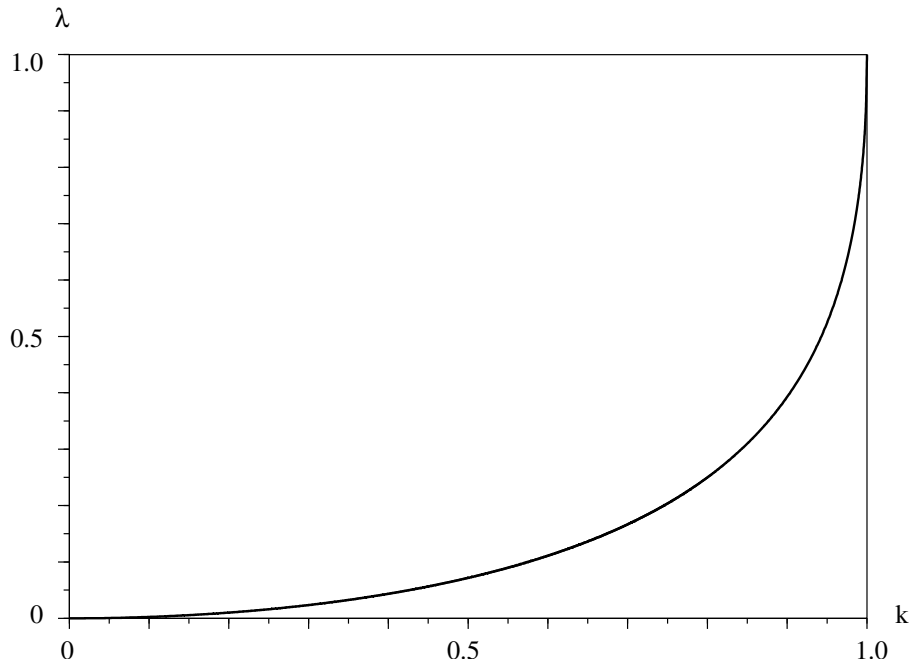


Abbildung 12: Modultransformation $\lambda = \frac{1-k'}{1+k'}$

Aus der Modulbeziehung 96 können außerdem die folgenden nützlichen Vertauschungsrelationen abgeleitet werden.

$$\begin{aligned} 1+k' &= 1 + \frac{1-\lambda}{1+\lambda} = \frac{2}{1+\lambda} \\ 1+\lambda &= \frac{2}{1+k'} \end{aligned} \quad (101)$$

Gebäuchliche Darstellungen für das Modul k sind außerdem

$$\begin{aligned} k^2 &= 1 - \left(\frac{1-\lambda}{1+\lambda}\right)^2 = \frac{(1+\lambda)^2 - (1-\lambda)^2}{(1+\lambda)^2} \\ k^2 &= \frac{4\lambda}{(1+\lambda)^2} = \lambda(1+k')^2 \\ k &= \frac{2\sqrt{\lambda}}{1+\lambda} = (1+k')\sqrt{\lambda} \end{aligned} \quad (102)$$

die wegen der Symmetrie von Formel 96 äquivalent auch für λ' gelten.

$$\lambda' = \frac{2\sqrt{k'}}{1+k'} = (1+\lambda)\sqrt{k'} \quad (103)$$

4 Modultransformationen

Eine weitere nützliche Formel für λ ist die folgende

$$\lambda = \left(\frac{k}{1+k'} \right)^2 = \left(\frac{1-k'}{k} \right)^2,$$

die sich aus der Multiplikation von Gleichung 96 mit $1+k'$ bzw. $1-k'$ unter Berücksichtigung der Definition des komplementären Moduls in Formel 1 ergibt.

Beziehungen für cn Die Transformationsbeziehung für $\text{cn}(u/M; \lambda)$ lautet

$$\text{cn}\left(\frac{u}{M}; \lambda\right) = \frac{1 - (1+k')\text{sn}^2(u; k)}{\text{dn}(u; k)}. \quad (104)$$

Beweis. Ausgangspunkt soll Definitionsgleichung 31 sowie die Landau-Transformation des elliptischen Sinus' in Formel 95 sein. Nach Kombination beider Gleichungen multipliziert man zuerst alle Terme aus, extrahiert danach $(1+k')\text{sn}^2(u; k)$ und vereinfacht abschließend durch Anwendung des binomischen Satzes.

$$\begin{aligned} \text{cn}^2\left(\frac{u}{M}; \lambda\right) &= 1 - \text{sn}^2\left(\frac{u}{M}; \lambda\right) \\ &= \frac{\text{dn}^2(u; k) - (1+k')^2\text{sn}^2(u; k)\text{cn}^2(u; k)}{\text{dn}^2(u; k)} \\ &= \frac{1 - (1+k')(1-k')\text{sn}^2(u; k) - (1+k')^2\text{sn}^2(u; k) + (1+k')^2\text{sn}^4(u; k)}{\text{dn}^2(u; k)} \\ &= \frac{1 - 2(1+k')\text{sn}^2(u; k) + (1+k')^2\text{sn}^4(u; k)}{\text{dn}^2(u; k)} \\ &= \frac{[1 - (1+k')\text{sn}(u; k)]^2}{\text{dn}^2(u; k)} \end{aligned}$$

□

Beziehungen für dn Die Beziehung für dn kann ebenfalls ausgehend von der des elliptischen Sinus' in Gleichung 95 und mit Hilfe seiner Definitionsgleichung 32 ermittelt werden.

$$\text{dn}\left(\frac{u}{M}; \lambda\right) = \frac{1 - (1-k')\text{sn}^2(u; k)}{\text{dn}(u; k)} \quad (105)$$

4 Modultransformationen

Beweis.

$$\begin{aligned}
 \operatorname{dn}^2\left(\frac{u}{M}; \lambda\right) &= 1 - \lambda^2 \operatorname{sn}^2\left(\frac{u}{M}; \lambda\right) \\
 &= 1 - \lambda^2 (1 + k')^2 \frac{\operatorname{sn}^2(u; k) \operatorname{cn}^2(u; k)}{\operatorname{dn}^2(u; k)} \\
 &= \frac{\operatorname{dn}^2(u; k) - (1 - k')^2 \operatorname{sn}^2(u; k) \operatorname{cn}^2(u; k)}{\operatorname{dn}^2(u; k)} \\
 &= \frac{1 - k^2 \operatorname{sn}^2(u; k) - (1 - k')^2 \operatorname{sn}^2(u; k) [1 - \operatorname{sn}^2(u; k)]}{\operatorname{dn}^2(u; k)}
 \end{aligned}$$

Ausmultiplizieren sowie nachfolgende Anwendung des Binomischen Satzes führt zu

$$\begin{aligned}
 \operatorname{dn}^2\left(\frac{u}{M}; \lambda\right) &= \frac{1 - 2(1 - k') \operatorname{sn}^2(u; k) + (1 - k')^2 \operatorname{sn}^4(u; k)}{\operatorname{dn}^2(u; k)} \\
 &= \frac{[1 - (1 - k') \operatorname{sn}^2(u; k)]^2}{\operatorname{dn}^2(u; k)}.
 \end{aligned}$$

□

Die weitere Umformung der rechten Seite von Gleichung 105 kann jetzt noch so erfolgen, daß sie einzig und allein auf $\operatorname{dn}(u; k)$ basiert.

$$\operatorname{dn}\left(\frac{u}{M}; \lambda\right) = \frac{1}{1 + k'} \cdot \frac{k' + \operatorname{dn}^2(u; k)}{\operatorname{dn}(u; k)} = \frac{1}{2} \cdot \frac{(1 - \lambda) + (1 + \lambda) \operatorname{dn}^2(u; k)}{\operatorname{dn}(u; k)}$$

Beweis. Für den Beweis verwendet man am einfachsten Definitionsgleichung 32 und Hilfsformel 2.

$$\begin{aligned}
 \operatorname{dn}\left(\frac{u}{M}; \lambda\right) &= \frac{1 - (1 - k') \operatorname{sn}^2(u; k)}{\operatorname{dn}(u; k)} \\
 &= \frac{1 + k' - [1 - \operatorname{dn}^2(u; k)]}{(1 + k') \operatorname{dn}(u; k)} \\
 &= \frac{1}{1 + k'} \cdot \frac{k' + \operatorname{dn}^2(u; k)}{\operatorname{dn}(u; k)}
 \end{aligned}$$

□

Trigonometrische Beziehungen Bezüglich Differentialgleichung 70 ist die L-Transformation durch die Substitution

4 Modultransformationen

$$\sin \theta = \frac{(1+k') \sin \varphi \cos \varphi}{\sqrt{1-k^2 \sin^2 \varphi}} \quad (106)$$

gekennzeichnet. Mit der Beziehung für doppelte Winkel $\sin 2\varphi = \frac{1}{2} \sin \varphi \cos \varphi$ ist äquivalent dazu

$$\sin \theta = \frac{1}{1+\lambda} \cdot \frac{\sin 2\varphi}{\sqrt{1-k^2 \sin^2 \varphi}}.$$

Aus Gleichung 104 ergibt sich folgerichtig für den Cosinus

$$\cos \theta = \frac{1 - (1+k') \sin^2 \varphi}{\sqrt{1-k^2 \sin^2 \varphi}} = \frac{\cos^2 \varphi - k' \sin^2 \varphi}{\sqrt{1-k^2 \sin^2 \varphi}} \quad (107)$$

und mit dem Theorem $\sin^2 \varphi = \frac{1}{2}(1 - \cos 2\varphi)$ sowie der Modulbeziehung 96

$$\cos \theta = \frac{1}{2} \cdot \frac{1 - k' + (1+k') \cos 2\varphi}{\sqrt{1-k^2 \sin^2 \varphi}} = \frac{1}{1+\lambda} \cdot \frac{\lambda + \cos 2\varphi}{\sqrt{1-k^2 \sin^2 \varphi}}.$$

Insbesondere für numerische Berechnungen hat der trigonometrische Tangens Bedeutung. Die entsprechenden Beziehungen können direkt aus Formel 95 sowie 104 gewonnen werden.

$$\tan \theta = \frac{\sin \theta}{\cos \theta} = \frac{(1+k') \sin \varphi \cos \varphi}{\cos^2 \varphi - k' \sin^2 \varphi} = \frac{(1+k') \tan \varphi}{1 - k' \tan^2 \varphi} \quad (108)$$

Eine weitere oft verwendete Darstellungsvariante auf der Grundlage des Tangens ist

$$\tan(\theta - \varphi) = k' \tan \varphi. \quad (109)$$

Beweis. Ausmultiplizieren von Gleichung 108 gefolgt von Umstellen nach $k' \tan \varphi$ ergibt

$$\begin{aligned} (1 - k' \tan^2 \varphi) \tan \theta &= (1 + k') \tan \varphi \\ \tan \theta - k' \tan \theta \tan^2 \varphi &= \tan \varphi + k' \tan \varphi \\ \tan \theta - \tan \varphi &= k' \tan \varphi (1 + \tan \theta \tan \varphi) \\ k' \tan \varphi &= \frac{\tan \theta - \tan \varphi}{1 + \tan \theta \tan \varphi}. \end{aligned}$$

Mit dem Additionstheorem $\tan(\alpha - \beta) = \frac{\tan \alpha - \tan \beta}{1 + \tan \alpha \tan \beta}$ kann man nach $\tan(\theta - \varphi)$ auflösen.

4 Modultransformationen

$$\tan(\theta - \varphi) = k' \tan \varphi.$$

□

Eine ebenfalls oft zu findende Darstellung mit Hilfe des trigonometrischen Sinus' lautet:

$$\begin{aligned} \sin(2\varphi - \theta) &= \lambda \sin \theta \\ \sin[\varphi - (\theta - \varphi)] &= \lambda \sin[\varphi + (\theta - \varphi)]. \end{aligned} \tag{110}$$

Beweis. Sie kann aus Gleichung 109 abgeleitet werden, wenn man die trigonometrische Produktformel $\sin \alpha \cos \beta = 1/2[\sin(\alpha + \beta) + \sin(\alpha - \beta)]$ anwendet.

$$\begin{aligned} \frac{\sin(\theta - \varphi)}{\cos(\theta - \varphi)} &= k' \frac{\sin \varphi}{\cos \varphi} \\ \sin(\theta - \varphi) \cos \varphi &= k' \cos(\theta - \varphi) \sin \varphi \\ \sin \theta - \sin(2\varphi - \theta) &= k' \sin \theta + k' \sin(2\varphi - \theta) \\ (1 + k') \sin(2\varphi - \theta) &= (1 - k') \sin \theta \\ \sin(2\varphi - \theta) &= \frac{1 - k'}{1 + k'} \sin \theta \end{aligned}$$

□

Beziehungen für $F(\varphi; k)$ Aus den allgemeinen Transformationsbeziehungen 77 und 76 sowie Formel 97 resultiert sofort folgende Darstellung

$$u = F(\varphi; k) = MF(\theta; \lambda) \tag{111}$$

$$F(\theta; \lambda) = (1 + k')F(\varphi; k). \tag{112}$$

4.7.2 GAUSS-Transformation

Die G -Transformation realisiert im Gegensatz zur L -Transformation (welche die reelle Periode teilt) eine Division der imaginären Periode durch zwei [Ach70, § 39], [Cay76, § 246]. Sie wird in vielen Literaturquellen durch folgende Gleichungen beschrieben.

4 Modultransformationen

$$\operatorname{sn}\left(\frac{u}{M}; \lambda\right) = \frac{(1+k)\operatorname{sn}(u; k)}{1+k\operatorname{sn}^2(u; k)} \quad (113)$$

$$M = \frac{1}{1+k} \quad (114)$$

$$\lambda = \frac{2\sqrt{k}}{1+k} \quad (115)$$

Es ist nun relativ einfach die G -Transformation mit Hilfe der elliptischen Funktionen direkt aus der L -Transformation abzuleiten.⁴¹

Beweis. Nimmt man als Ausgangspunkt Gleichung 95 der L -Transformation und ersetzt $\operatorname{sn}(u; k)\operatorname{cd}(u; k)$ mit Hilfe von Gleichung 52, dann ergibt sich

$$\operatorname{sn}\left(\frac{u}{M}; \lambda\right) = \frac{1+k'}{k} \sqrt{\frac{1-\operatorname{dn}(2u; k)}{1+\operatorname{dn}(2u; k)}}.$$

Quadrieren und Umstellen nach $\operatorname{dn}(2u; k)$ führt zu einer ersten recht bekannten Gleichung der G -Transformation.

$$\begin{aligned} \lambda \operatorname{sn}^2\left(\frac{u}{M}; \lambda\right) [1 + \operatorname{dn}(2u; k)] &= 1 - \operatorname{dn}(2u; k) \\ \operatorname{dn}(2u; k) \left[1 + \lambda \operatorname{sn}^2\left(\frac{u}{M}; \lambda\right)\right] &= 1 - \lambda \operatorname{sn}^2\left(\frac{u}{M}; \lambda\right) \\ \operatorname{dn}(2u; k) &= \frac{1 - \lambda \operatorname{sn}^2(u/M; \lambda)}{1 + \lambda \operatorname{sn}^2(u/M; \lambda)} \end{aligned} \quad (116)$$

Will man die Beziehungen für den elliptischen Sinus ermitteln, dann ist auf der linken Seite noch $\operatorname{sn}(2u; k)$ zu extrahieren. Dazu verwendet man am einfachsten Definitionsgleichung 32 der Delta-Amplitude sowie Hilfsformel 102.

$$\begin{aligned} 1 - k^2 \operatorname{sn}^2(2u; k) &= \left[\frac{1 - \lambda \operatorname{sn}^2(u/M; \lambda)}{1 + \lambda \operatorname{sn}^2(u/M; \lambda)} \right]^2 \\ k^2 \operatorname{sn}^2(2u; k) &= \frac{\left[1 + \lambda \operatorname{sn}^2(u/M; \lambda)\right]^2 - \left[1 - \lambda \operatorname{sn}^2(u/M; \lambda)\right]^2}{\left[1 + \lambda \operatorname{sn}^2(u/M; \lambda)\right]^2} \\ k^2 \operatorname{sn}^2(2u; k) &= \frac{4\lambda \operatorname{sn}^2(u/M; \lambda)}{\left[1 + \lambda \operatorname{sn}^2(u/M; \lambda)\right]^2} \\ \operatorname{sn}(2u; k) &= \frac{(1+\lambda)\operatorname{sn}(u/M; \lambda)}{1 + \lambda \operatorname{sn}^2(u/M; \lambda)} \end{aligned}$$

⁴¹Häufig wird diese Transformation deshalb auch als *absteigende* L -Transformation bezeichnet.

4 Modultransformationen

Nimmt man zuletzt noch die Ersetzungen

$$\begin{aligned} u_g &= \frac{u}{M} \\ \frac{u_g}{M_g} &= 2u \\ \lambda_g &= k \quad (\Lambda_g = K) \\ k_g &= \lambda \quad (K_g = \Lambda) \end{aligned}$$

vor und bezieht die Transformationsbeziehungen 95, 97, und 96 mit ein, dann erhält man die Beziehungen der G -Transformation.⁴²

$$\begin{aligned} u &= u_g M = \frac{u_g}{2M_g} \\ M_g &= \frac{1}{2M} = \frac{1+k'}{2} = \frac{1}{1+\lambda} = \frac{1}{1+k_g} \\ \lambda_g &= \frac{2\sqrt{\lambda}}{1+\lambda} = \frac{2\sqrt{k_g}}{1+k_g} \\ k_g &= \frac{1-k'}{1+k'} = \frac{1-\lambda'_g}{1+\lambda'_g} \end{aligned}$$

□

Beziehungen für dn Für die Delta-Amplitude dn ergibt sich die Transformationsbeziehung recht einfach aus Zwischenformel 116, wenn Gleichung 34 in der Form

$$k^2 \operatorname{sn}^2(u; k) = 1 - \operatorname{dn}^2(u; k)$$

berücksichtigt wird.

$$\begin{aligned} \operatorname{dn}\left(\frac{u}{M}; \lambda\right) &= \frac{1 - k \operatorname{sn}^2(u; k)}{1 + k \operatorname{sn}^2(u; k)} \\ &= \frac{k - [1 - \operatorname{dn}^2(u; k)]}{k + [1 - \operatorname{dn}^2(u; k)]} \end{aligned} \tag{117}$$

⁴²Um die Eindeutigkeit bei der Darstellung der Zusammenhänge mit der L -Transformation zu wahren, sind alle Größen aus den Formeln der G -Transformation mit "g" indiziert worden

4 Modultransformationen

Beziehungen für cn Die noch ausstehende Beziehung für cn lautet

$$\operatorname{cn}\left(\frac{u}{M}; \lambda\right) = \frac{\operatorname{cn}(u; k) \operatorname{dn}(u; k)}{1 + k \operatorname{sn}^2(u; k)}. \quad (118)$$

Trigonometrische Beziehungen Die gesuchte Beziehung für den Sinus erhält man wieder durch direkte Umsetzung von Transformationsbeziehung 113 mit Hilfe der trigonometrischen Äquivalenzen in Gleichung 70 sowie 30.

$$\sin \theta = \frac{(1+k) \sin \varphi}{1+k \sin^2 \varphi}$$

Eine eng mit der G-Form des elliptischen Integrals erster Art (siehe Gleichung 6) verbundene Darstellung ist immer die über den Tangens. Sie kann aus der vorangegangenen Gleichung sowie dem Äquivalent für den Cosinus nach Formel 118

$$\cos \theta = \frac{\cos \varphi \sqrt{1-k^2 \sin^2 \varphi}}{1+k \sin^2 \varphi}$$

gewonnen werden, wenn man dann noch die trigonometrische Beziehung $\sin^2 \varphi = \tan^2 \varphi / (1 + \tan^2 \varphi)$ hinzuzieht.

$$\begin{aligned} \tan \theta &= \frac{\sin \theta}{\cos \theta} = \frac{(1+k) \sin \varphi}{\cos \varphi \sqrt{1-k^2 \sin^2 \varphi}} \\ &= \frac{(1+k) \tan \varphi}{\sqrt{1-k^2 \frac{\tan^2 \varphi}{1+\tan^2 \varphi}}} \\ &= (1+k) \tan \varphi \sqrt{\frac{1+\tan^2 \varphi}{1+k^2 \tan^2 \varphi}} \end{aligned} \quad (119)$$

Periodenverhältnis Die Bestimmung des Periodenverhältnisses gestaltet sich ausgehend von den Periodenbeziehungen der L-Transformation relativ einfach. Man muß dabei nur Gleichung 94 auf die mit einem tiefgestellten "g" gekennzeichneten Größen der G-Transformation umsetzen.

4 Modultransformationen

$$\begin{aligned}\Lambda_g &= 2MK_g = \frac{K_g}{M_g} \\ j\Lambda'_g &= jMK'_g = j\frac{K'_g}{2M_g} \\ 2\frac{K_g}{K'_g} &= \frac{\Lambda_g}{\Lambda'_g}\end{aligned}\tag{120}$$

4.8 Erste elliptische Haupttransformation, n ungerade

4.8.1 Periodenbeziehungen

Charakteristisch für die 1. elliptische Haupttransformation ist, daß die reelle Periode $2\Omega = 4M\Lambda$ von $y = g(u/M; \lambda)$ genau n -mal die reelle Periode $2\omega = 4K$ von $x = \operatorname{sn}(u; k)$ teilt, die imaginären Perioden aber gleich sind (n -te Teilung der ersten Periode,⁴³ vgl. Fall $\gamma = n$, $\delta = 1$ in Abschnitt 4.5).

$$K = nM\Lambda\tag{121}$$

$$K' = M\Lambda'\tag{122}$$

Das sich ergebende Periodenverhältnis

$$\frac{\Lambda'}{\Lambda} = n\frac{K'}{K}\tag{123}$$

zeigt, daß es sich bei der Beziehung zwischen λ und k um eine Modulgleichung vom Grad n handelt.⁴⁴

Den Verlauf für x und y im Bereich $-K \leq u \leq K$ in Abhängigkeit vom Parameter u zeigt Abbildung 13.

4.8.2 Funktionsverlauf

Für ungerades $\gamma = n$ muß die Integrationskonstante C aus Abschnitt 4.5 verschwinden, damit y auf Wegabschnitt ② in Abbildung 8a reell ist.⁴⁵

⁴³In der Literatur wird der Begriff der *ersten Periode* sehr häufig anstatt *reelle Periode* verwendet, da er besser der Verallgemeinerung mehrfach-periodischer Funktionen entspricht (siehe z. B. [Koe74]).

⁴⁴Welche der Ungleichung $\lambda < k$ genügt (vgl. Abbildung 4, in der das Verhältnis K/K' als Funktion des Moduls k dargestellt ist).

⁴⁵Nach Tabelle 5 gilt auf diesem Teilstück $y = nd(\operatorname{Im}(u)/M; \lambda')$.

4 Modultransformationen

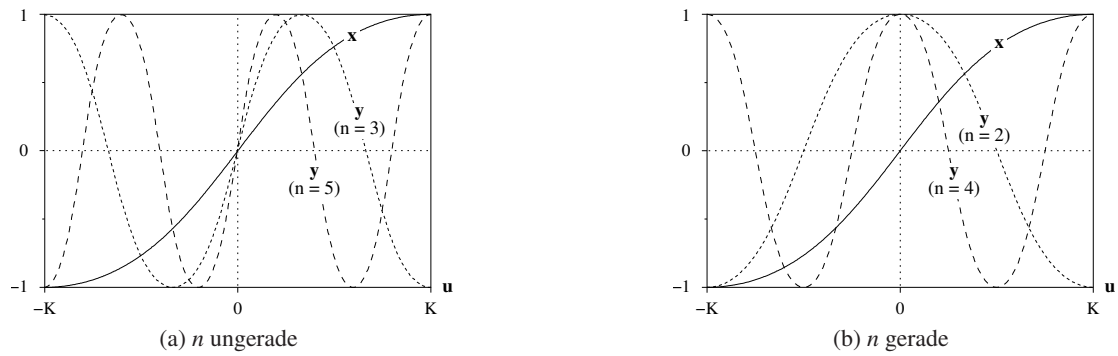


Abbildung 13: Verlauf für x und y im Intervall $-K \leq u \leq K$

$$y = \operatorname{sn}\left(\frac{u}{M}; \lambda\right) \tag{124}$$

Der zugeordnete Verlauf des Parameters u ist für diesen Fall nocheinmal anschaulich in Abbildung 14 illustriert (inklusive der positiven Nullstellen und Pole), wobei fett dargestellte Gitternetzlinien reelle Werte des elliptischen Sinus' kennzeichnen.

Der Funktionsverlauf von $y = f(x; k)$ ist in Abbildung 15 dargestellt.

Er ist direkt aus dem Gitter in Abbildung 14 erklärbar, wenn man folgendes bedenkt:

1. Auf Wegabschnitt ① läuft x von 0 nach 1 (u entsprechend von 0 bis K), während y wegen Gleichung 121 genau n -mal die reelle Viertelperiode des elliptischen Sinus durchläuft und dadurch $(n - 1)/2$ Nullstellen erzeugt.⁴⁶
2. Auf Wegabschnitt ② läuft x von 1 bis $1/k$ (siehe auch Tabelle 5). Da die imaginären (Halb-) Perioden von x und y nach Formel 122 aber gleich sind, bewegt sich y äquivalent von 1 bis $1/\lambda$.
3. Auf Abschnitt ③ des Weges von u herrschen ähnliche Verhältnis wie auf dem Ersten, nur daß y hier invertiert ist und so wegen Formel 121 genau $(n - 1)/2$ Pole generiert.

4.8.3 Rationale Lösungsfunktion

Aus den wichtigsten Eigenschaften der Differentialgleichung 70 sowie der Transformationsfunktion, welche in Abschnitt 4.5 erarbeitet wurden, hat schon C.G.J. J in [Jac29] die folgende spezielle Form der rationalen Transformationsfunktion geschlußfolgert (vgl. auch [Cay76, § 229], [Ach70, § 40]).

⁴⁶Die Nullstelle bei $x = 0$ nicht mitgezählt.

4 Modultransformationen

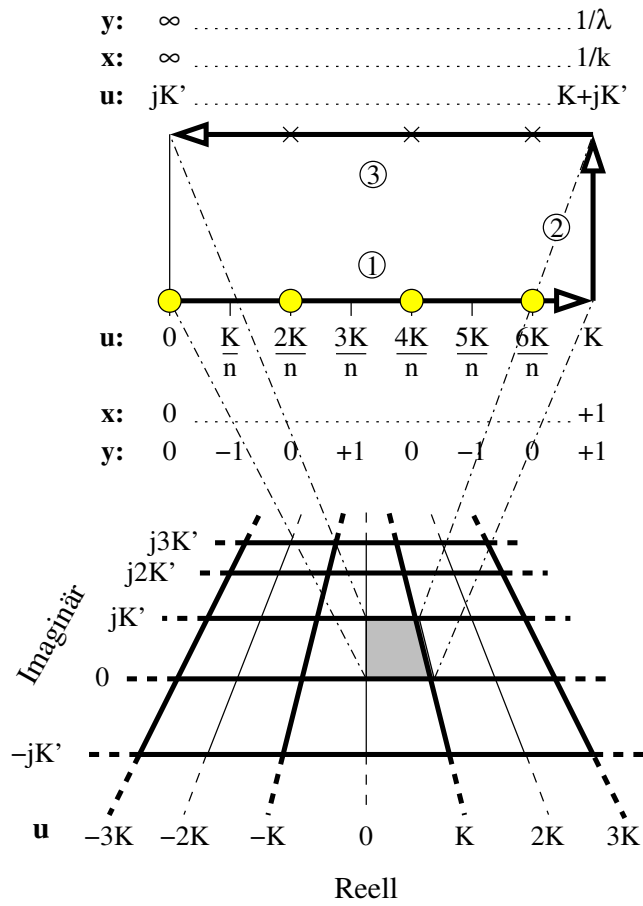


Abbildung 14: Verlauf von u in der komplexen Ebene ($n = 7$, ungerade)

4 Modultransformationen

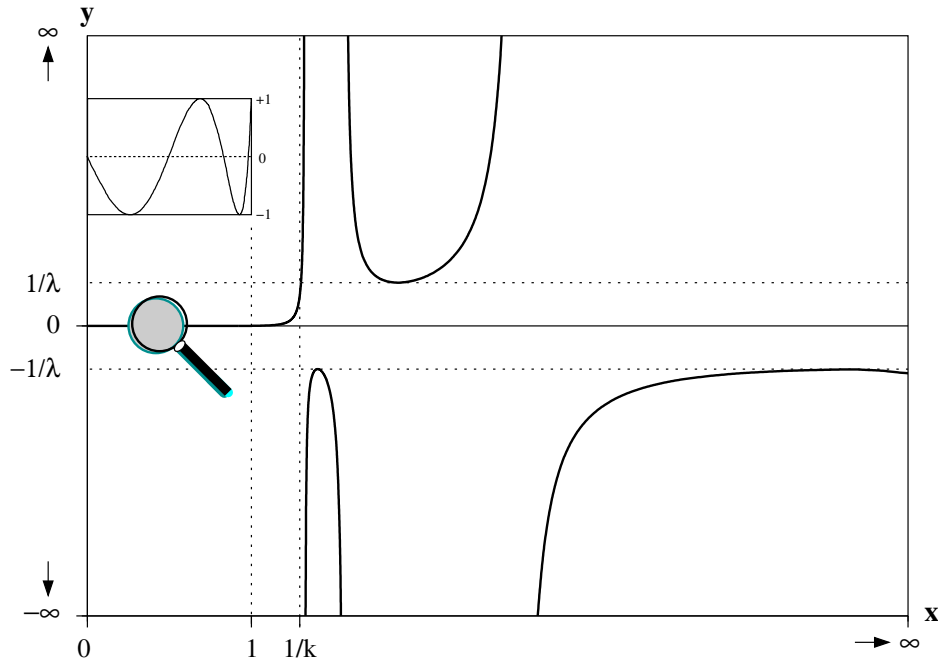


Abbildung 15: Erste elliptische Haupttransformation für $n = 7$

$$y = \frac{x}{M} \cdot \frac{\left(1 - \frac{x^2}{a_2^2}\right)\left(1 - \frac{x^2}{a_4^2}\right)\left(1 - \frac{x^2}{a_6^2}\right)\dots}{(1 - k^2 a_2^2 x^2)(1 - k^2 a_4^2 x^2)(1 - k^2 a_6^2 x^2)\dots} = \frac{x}{M} \prod_{v=2,4,6,\dots}^{n-1} \frac{1 - \frac{x^2}{a_v^2}}{1 - k^2 a_v^2 x^2} \quad (125)$$

Sie gewährleistet insbesondere, daß

- $y = f(x; k)$ eine rationale, ungerade Polynomfunktion der Form $U(x)/V(x)$ ist;
- das Verhalten für reziproke Argumente der Art $1/kx$ konform zu Gleichung 81 erfüllt werden kann;
- sowie die speziellen Werte $f(0; k) = 0$ und $f(1; k) = (-1)^{(n-1)/2}$ realisierbar sind.⁴⁷

4.8.4 Nullstellen (Koeffizienten)

Offen ist unter anderem die Bestimmung der Koeffizienten a_i , welche sowohl zur Berechnung von M als auch λ benötigt werden. Dazu muß man sich über die Lage und Anzahl der Nullstellen in Gleichung 125 klar werden.

1. Die durch Gleichung 125 repräsentierte Funktion hat n Nullstellen, wobei $(n-1)/2$ davon letztlich die Koeffizienten a_v erzeugen.

⁴⁷Wobei der Wert $f(1; k) = (-1)^{(n-1)/2}$ durch den Multiplikator M angepaßt wird.

4 Modultransformationen

2. In der gleichwertigen (elliptischen) Parameterdarstellung 77, also in $y = \operatorname{sn}(u/M; \lambda)$, müssen diese Nullstellen ebenfalls enthalten sein.

Die Koeffizienten a_ν der rationalen Transformationsgleichung 125 sind nun folgendermaßen bestimmt

$$a_\nu = \operatorname{sn}\left(\nu \frac{K}{n}; k\right), \quad \nu = 2, 4, 6, \dots, n-1. \quad (126)$$

Beweis. Kennt man die Nullstellen x_{ν} von Gleichung 125, dann kennt man auch die Koeffizienten a_ν darin.⁴⁸

$$a_\nu = x_{\nu}, \quad \nu = 2, 4, 6, \dots, n-1$$

Die reellen Nullstellen, die alle im Bereich $|x| < 1$ bzw. $|u| < K$ liegen, ergeben sich aus der elliptischen Parameterdarstellung für y

$$\begin{aligned} y &= \operatorname{sn}\left(\frac{u_\nu}{M}; \lambda\right) = 0 \\ u_{\nu} &= \nu M \Lambda, \quad |\nu| = 0, 2, 4, 6, \dots, n-1 \end{aligned}$$

sowie der für x in Verbindung mit den Periodenbeziehungen.

$$\begin{aligned} x_{\nu} &= \operatorname{sn}(u_\nu; k) \\ x_{\nu} &= \operatorname{sn}\left(\nu \frac{K}{n}; k\right) \leq 1, \quad |\nu| = 0, 2, 4, 6, \dots, n-1 \end{aligned} \quad (127)$$

□

4.8.5 Polstellen

Die $n-1$ reellen Pole ermitteln sich nun recht einfach, wenn man in Gleichung 125 die Produktterme des Nenners Null setzt.

$$\begin{aligned} x_{\nu} &= \frac{1}{ka_\nu} = \frac{1}{kx_{\nu}} \\ x_{\nu} &= \frac{1}{k \operatorname{sn}\left(\nu \frac{K}{n}; k\right)} \geq \frac{1}{k}, \quad |\nu| = 2, 4, 6, \dots, n-1 \end{aligned} \quad (128)$$

⁴⁸Wobei an dieser Stelle nur die positiven und von Null verschiedenen Nullstellen betrachtet werden.

4 Modultransformationen

Zum gleichen Ergebnis gelangt man, wenn die elliptische Darstellung mittels Gleichung 76 und 77 als Ausgangspunkt genommen wird. Die Pole liegen dann offensichtlich auf dem We-gabschnitt ③ laut Abbildung 14 bzw. Tabelle 5, und zwar bei $u_{\nu} = K + jK' + \nu K/n$.

4.8.6 Extremwerte

Die lokalen Extremwerte, deutlich sichtbar auch in Abbildung 15, liegen bei

$$x_E = \operatorname{sn}(u_E; k) = \begin{cases} \pm \operatorname{sn}\left(\nu \frac{K}{n}; k\right) \\ \pm \frac{1}{k} \operatorname{ns}\left(\nu \frac{K}{n}; k\right) \end{cases}, \quad \nu = 1, 3, 5, \dots, n-2$$

$$y_E = \operatorname{sn}\left(\frac{u_E}{M}; \Lambda\right) = \begin{cases} \pm 1 \\ \pm \frac{1}{\lambda} \end{cases}.$$

Beweis. Die Bestimmung der Extremwerte kann (wie üblich) mit Hilfe der ersten Ableitung von $y = f(x; k)$ erfolgen. Bedenkt man aber, daß $y = f(x; k)$ ja die Lösung der Differentialgleichung 69 ist, dann kann man mit Blick auf Formel 71 sofort zur Bestimmung der Nullstellen von dy/dx übergehen.

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{M} \cdot \frac{\operatorname{cn}\left(\frac{u}{M}; \lambda\right) \operatorname{dn}\left(\frac{u}{M}; \lambda\right)}{\operatorname{cn}(u; k) \operatorname{dn}(u; k)} = 0.$$

Die Kombination der Nullstellen von $\operatorname{cn}(u/M; \lambda)$ und $\operatorname{dn}(u/M; \lambda)$ führt nach Tabelle 1 für u zu den Extremstellen

$$\frac{u_E}{M} = (2\eta + 1)\Lambda + j\zeta\Lambda', \quad \eta, \zeta \in \mathbb{Z}$$

$$u_E = (2\eta + 1)\frac{K}{n} + j\zeta K'.$$

Berücksichtigt man die Ausprägungen des elliptischen Sinus' für spezielle Argumente nach Ta-belle 2, dann kann der Beweis abgeschlossen werden.

$$x_E = \operatorname{sn}(u_E; k) = \begin{cases} \pm \operatorname{sn}\left(\nu \frac{K}{n}; k\right) & (\nu = 1, 3, 5, \dots, n-2; \zeta \text{ gerade}) \\ \pm \frac{1}{k} \operatorname{ns}\left(\mu \frac{K}{n}; k\right) & (\mu = 1, 3, 5, \dots, n-2; \zeta \text{ ungerade}) \end{cases}$$

$$y_E = \operatorname{sn}\left(\frac{u_E}{M}; \Lambda\right) = \begin{cases} \pm 1 & (\nu = 1, 3, 5, \dots, n-2; \zeta \text{ gerade}) \\ \pm \frac{1}{\lambda} & (\mu = 1, 3, 5, \dots, n-2; \zeta \text{ ungerade}) \end{cases}.$$

□

4.8.7 Beziehungen für die elliptischen Funktionen

Transformationsbeziehung für sn Die Transformationsbeziehung bei Verwendung des elliptischen Sinus' ist direkt in Gleichung 125 enthalten, wenn man x und y entsprechend der Beziehungen 76 und 77 ersetzt.

$$\operatorname{sn}\left(\frac{u}{M}; \lambda\right) = \frac{\operatorname{sn}(u; k)}{M} \prod_{v=2,4,6,\dots}^{n-1} \frac{1 - \frac{\operatorname{sn}^2(u; k)}{\operatorname{sn}^2(vK/n; k)}}{1 - k^2 \operatorname{sn}^2\left(v\frac{K}{n}; k\right) \operatorname{sn}^2(u; k)} \quad (129)$$

Aus der letzten Darstellung der Transformationsbeziehung läßt sich auch die Linearfaktorzerlegung mit Hilfe der Pol- und Nullstellen gewinnen.

$$\begin{aligned} y &= \frac{x}{M} \prod_{v=2,4,6,\dots}^{n-1} \frac{1 - \frac{x^2}{x_v^2}}{1 - k^2 x_v^2 x^2} \\ y &= \frac{x}{M} \prod_{v=2,4,6,\dots}^{n-1} \left[\frac{1}{k^2 x_v^4} \cdot \frac{(x - x_v)(x + x_v)}{\left(x - \frac{1}{kx_v}\right)\left(x + \frac{1}{kx_v}\right)} \right] \\ y &= (-1)^{\frac{n-1}{2}} \frac{k}{\lambda} M x \prod_{v=2,4,6,\dots}^{n-1} \frac{(x - x_v)(x + x_v)}{(x - x_v)(x + x_v)} \end{aligned}$$

Weitere interessante Darstellungen der Transformationsbeziehung 129 ergeben sich bei Vorwegnahme von Gleichung 138

$$\prod_{v=1,3,5,\dots}^{n-2} \operatorname{sn}^2\left(v\frac{K}{n}; k\right) = M \prod_{v=2,4,6,\dots}^{n-1} \operatorname{sn}^2\left(v\frac{K}{n}; k\right)$$

sowie Multiplikationsformel 47.

$$\begin{aligned} \operatorname{sn}\left(\frac{u}{M}; \lambda\right) &= \frac{\operatorname{sn}(u; k)}{M} \prod_{v=2,4,6,\dots}^{n-1} \frac{1}{\operatorname{sn}^2\left(v\frac{K}{n}; k\right)} \cdot \frac{\operatorname{sn}^2\left(v\frac{K}{n}; k\right) - \operatorname{sn}^2(u; k)}{1 - k^2 \operatorname{sn}^2\left(v\frac{K}{n}; k\right) \operatorname{sn}^2(u; k)} \\ &= (-1)^{\frac{n-1}{2}} \frac{\operatorname{sn}(u; k)}{\prod_{v=1,3,5,\dots}^{n-2} \operatorname{sn}^2\left(v\frac{K}{n}; k\right)} \prod_{v=2,4,6,\dots}^{n-1} \operatorname{sn}\left(u + v\frac{K}{n}; k\right) \operatorname{sn}\left(u - v\frac{K}{n}; k\right) \\ &= (-1)^{\frac{n-1}{2}} \sqrt{\frac{\lambda}{k^n}} \operatorname{sn}(u; k) \prod_{v=2,4,6,\dots}^{n-1} \operatorname{sn}\left(u + v\frac{K}{n}; k\right) \operatorname{sn}\left(u - v\frac{K}{n}; k\right) \\ &= (-1)^{\frac{n-1}{2}} \sqrt{\frac{\lambda}{k^n}} \prod_{v=-(n-1), -(n-3), \dots}^{n-1} \operatorname{sn}\left(u + v\frac{K}{n}; k\right) \end{aligned}$$

4 Modultransformationen

Transformationsbeziehung für cn Die Beziehungen für cn und dn können z. B. abgeleitet werden, indem man die Pole und Nullstellen der (ebenfalls) rationalen Polynome $\text{cn}^2(u/M; \lambda) = 1 - y^2$ und $\text{dn}^2(u/M; \lambda) = 1 - \lambda^2 y^2$ ermittelt. Beide Funktionen haben die gleichen Pole, wie der elliptische Sinus $y = \text{sn}(u/M; \lambda) = U(x)/V(x)$ für diesen Fall.

$$1 - y^2 = \frac{V^2(x) - U^2(x)}{V^2(x)}$$

$$1 - \lambda^2 y^2 = \frac{V^2(x) - \lambda^2 U^2(x)}{V^2(x)}$$

Zur Bestimmung der Linearfaktoren des Zählers wird zuerst der elliptische Cosinus $\text{cn}(u/M; \lambda)$ betrachtet, dessen Nullstellen bei $(2\nu + 1)M\Lambda = (2\nu + 1)K/n$ mit $\nu \in \mathbb{Z}$ liegen. An diesen Stellen nimmt x nach Gleichung 76 die Werte $\text{sn}[(2\nu + 1)K/n; k]$ an. Da der Grad des Zählerpolynoms genau dem von y entspricht läßt sich folgende Linearfaktordarstellung angeben, die abgesehen vom Vorfaktor A eindeutig bestimmt ist.

$$1 - y^2 = \text{cn}^2\left(\frac{u}{M}; \lambda\right) = A^2 \frac{\prod_{\mu=1,3,5,\dots}^{4n-1} \left[x - \text{sn}\left(\mu \frac{K}{n}; k\right) \right]}{\prod_{\nu=2,4,6,\dots}^{n-1} \left[1 - k^2 \text{sn}^2\left(\nu \frac{K}{n}; k\right) x^2 \right]^2}$$

Wegen der Symmetrie $\text{sn}(K - u; k) = \text{sn}(K + u; k)$ und der Spiegelungsbeziehung $\text{sn}(2K - u; k) = -\text{sn}(2K + u; k)$ kann man den Zähler vereinfachen.

$$\begin{aligned} \text{cn}^2\left(\frac{u}{M}; \lambda\right) &= A^2 (1 - x^2) \frac{\prod_{\mu=1,3,5,\dots}^{n-2} \left[x^2 - \text{sn}^2\left(\mu \frac{K}{n}; k\right) \right]^2}{\prod_{\nu=2,4,6,\dots}^{n-1} \left[1 - k^2 \text{sn}^2\left(\nu \frac{K}{n}; k\right) x^2 \right]^2} \\ &= A^2 (1 - x^2) \prod_{\mu=1,3,5,\dots}^{n-2} \text{sn}^4\left(\mu \frac{K}{n}; k\right) \cdot \frac{\prod_{\eta=1,3,5,\dots}^{n-2} \left[1 - \frac{x^2}{\text{sn}^2(\eta K/n; k)} \right]^2}{\prod_{\nu=2,4,6,\dots}^{n-1} \left[1 - k^2 \text{sn}^2\left(\nu \frac{K}{n}; k\right) x^2 \right]^2} \end{aligned}$$

Aus dem schon bekannten Funktionswert $y = f(0; k) = 0$ entsprechend Abschnitt 4.5, Formel 82 kann man abschließend den Vorfaktor A ermitteln

4 Modultransformationen

$$1 = A^2 \prod_{\mu=1,3,5,\dots}^{n-2} \operatorname{sn}^4\left(\mu \frac{K}{n}; k\right)$$

$$A^2 = \frac{1}{\prod_{\mu=1,3,5,\dots}^{n-2} \operatorname{sn}^4\left(\mu \frac{K}{n}; k\right)}$$

und damit die Transformationsbeziehung für cn angeben.

$$\operatorname{cn}\left(\frac{u}{M}; \lambda\right) = \operatorname{cn}(u; k) \frac{\prod_{\mu=1,3,5,\dots}^{n-2} 1 - \frac{\operatorname{sn}^2(u; k)}{\operatorname{sn}^2(\mu K/n; k)}}{\prod_{\nu=2,4,6,\dots}^{n-1} 1 - k^2 \operatorname{sn}^2\left(\nu \frac{K}{n}; k\right) \operatorname{sn}^2(u; k)} \quad (130)$$

Transformationsbeziehung für dn Für dn kann man in gleicher Art und Weise verfahren, also beginnend mit der Bestimmung der Nullstellen. Wegen $\operatorname{dn}(\nu + jK'; k) = -j\operatorname{cs}(\nu; k)$ nach Tabelle 3 liegen die Nullstellen (bezüglich u) bei $(2\nu + 1)M\Lambda + jM\Lambda' = (2\nu + 1)K/n + jK'$ mit $\nu \in \mathbb{Z}$. Da aber (vgl. ebenfalls Tabelle 3) für sn die Beziehung $\operatorname{sn}(\nu + jK'; k) = k^{-1}\operatorname{ns}(\nu; k)$ gilt, nimmt x an den Nullstellen die Werte $k^{-1}\operatorname{ns}[(2\nu + 1)K/n; k]$ an. Nun ist man (wie beim elliptischen Cosinus auch) in der Lage eine entsprechende Linearfaktordarstellung anzugeben.

$$1 - \lambda^2 y^2 = \operatorname{dn}^2\left(\frac{u}{M}; \lambda\right) = B^2 \frac{\prod_{\mu=1,3,5,\dots}^{4n-1} x - k^{-1}\operatorname{ns}\left(\mu \frac{K}{n}; k\right)}{\prod_{\nu=2,4,6,\dots}^{n-1} \left[1 - k^2 \operatorname{sn}^2\left(\nu \frac{K}{n}; k\right) x^2\right]^2}$$

$$= B^2 (x^2 - k^{-2}) \frac{\prod_{\mu=1,3,5,\dots}^{n-2} \left[x^2 - k^{-2}\operatorname{ns}^2\left(\mu \frac{K}{n}; k\right)\right]^2}{\prod_{\nu=2,4,6,\dots}^{n-1} \left[1 - k^2 \operatorname{sn}^2\left(\nu \frac{K}{n}; k\right) x^2\right]^2}$$

Aus dem Funktionswert $y = 0$ an der Stelle $x = 0$ kann man wieder den Vorfaktor bestimmen.

$$B^2 = -k^2 \prod_{\mu=1,3,5,\dots}^{n-2} k^4 \operatorname{sn}^4\left(\mu \frac{K}{n}; k\right)$$

Einsetzen und Ausmultiplizieren des Zählers liefert das Ergebnis

4 Modultransformationen

$$\begin{aligned} \operatorname{dn}^2\left(\frac{u}{M}; \lambda\right) &= (1 - k^2 x^2) \frac{\prod_{\mu=1,3,5,\dots}^{n-2} [1 - k^2 \operatorname{sn}^2\left(\mu \frac{K}{n}; k\right) x^2]^2}{\prod_{\nu=2,4,6,\dots}^{n-1} [1 - k^2 \operatorname{sn}^2\left(\nu \frac{K}{n}; k\right) x^2]^2} \\ \operatorname{dn}\left(\frac{u}{M}; \lambda\right) &= \sqrt{1 - k^2 x^2} \frac{\prod_{\mu=1,3,5,\dots}^{n-2} 1 - k^2 \operatorname{sn}^2\left(\mu \frac{K}{n}; k\right) x^2}{\prod_{\nu=2,4,6,\dots}^{n-1} 1 - k^2 \operatorname{sn}^2\left(\nu \frac{K}{n}; k\right) x^2} \end{aligned} \quad (131)$$

$$\operatorname{dn}\left(\frac{u}{M}; \lambda\right) = \operatorname{dn}(u; k) \frac{\prod_{\mu=1,3,5,\dots}^{n-2} 1 - k^2 \operatorname{sn}^2\left(\mu \frac{K}{n}; k\right) \operatorname{sn}^2(u; k)}{\prod_{\nu=2,4,6,\dots}^{n-1} 1 - k^2 \operatorname{sn}^2\left(\nu \frac{K}{n}; k\right) \operatorname{sn}^2(u; k)}. \quad (132)$$

4.8.8 Der Multiplikator M

Mit dem Funktionswert $y = (-1)^{(n-1)/2}$ an der Stelle $x = 1$ kann man den Multiplikator M in Gleichung 125 recht einfach bestimmen (vgl. auch allgemeine Aussagen in Abschnitt 4.5, Formel 82).

$$\begin{aligned} (-1)^{\frac{n-1}{2}} &= \frac{1}{M} \prod_{\nu=2,4,6,\dots}^{n-1} \frac{1 - a_\nu^{-2}}{1 - k^2 a_\nu^2} \\ M &= (-1)^{\frac{n-1}{2}} \prod_{\nu=2,4,6,\dots}^{n-1} \frac{1 - a_\nu^{-2}}{1 - k^2 a_\nu^2} \end{aligned} \quad (133)$$

Mit der Formel für die Koeffizienten a_ν ergeben sich neue Darstellungsmöglichkeiten sowohl für M als auch λ . Dazu soll mit Hilfe der Verschiebungsrelation $\operatorname{sn}(K - u; k) = \operatorname{cd}(u; k)$ nach 3 zuerst der folgende (mehrfach auftretende) Term vereinfacht werden.

$$\begin{aligned} \frac{1 - a_\nu^2}{1 - k^2 a_\nu^2} &= \operatorname{cd}^2\left(\nu \frac{K}{n}; k\right), & \nu &= 2, 4, 6, \dots, n-1 \\ &= \operatorname{sn}^2\left(K - \nu \frac{K}{n}; k\right) \\ &= \operatorname{sn}^2\left((n - \nu) \frac{K}{n}; k\right) \\ &= \operatorname{sn}^2\left(\mu \frac{K}{n}; k\right), & \mu &= n-2, n-4, \dots, 5, 3, 1 \end{aligned} \quad (134)$$

Jetzt kann ausgehend von Gleichung 133 der Multiplikator M konkretisiert werden.

4 Modultransformationen

$$M = \prod_{v=2,4,6,\dots}^{n-1} \frac{1}{a_v^2} \cdot \frac{1-a_v^2}{1-k^2 a_v^2} = \frac{\prod_{\mu=1,3,5,\dots}^{n-2} \operatorname{sn}^2\left(\mu \frac{K}{n}; k\right)}{\prod_{v=2,4,6,\dots}^{n-1} \operatorname{sn}^2\left(v \frac{K}{n}; k\right)} \quad (135)$$

4.8.9 Das Modul λ

Aus der Eigenschaft der Unveränderlichkeit von Differentialgleichung 69 für $x := 1/kx$ und $y := 1/\lambda y$ nach Formel 81 kann man das Modul λ ermitteln.

$$\lambda = M^2 k^n \prod_{v=2,4,6,\dots}^{n-1} a_v^4 = k^n \prod_{v=2,4,6,\dots}^{n-1} \left(\frac{1-a_v^2}{1-k^2 a_v^2} \right)^2 \quad (136)$$

Beweis. Dazu geht man wieder von Gleichung 125 aus und nimmt darin die entsprechenden Substitutionen vor.

$$\frac{1}{\lambda y} = \frac{1}{kM} \prod_{v=2,4,6,\dots}^{n-1} \frac{1 - \frac{1}{k^2 a_v^2 x^2}}{1 - \frac{a_v^2}{x^2}}$$

Da auch hier die Bedingung $y = f(1; k) = (-1)^{(n-1)/2}$ erfüllt sein soll (vgl. spezielle Werte nach Formel 82), kann man, wenn Gleichung 133 hinzugenommen wird, schreiben

$$\begin{aligned} \frac{1}{\lambda} &= \frac{1}{kM} \prod_{v=2,4,6,\dots}^{n-1} \frac{1 - \frac{1}{k^2 a_v^2}}{1 - a_v^2} \\ \lambda &= kM \prod_{v=2,4,6,\dots}^{n-1} \frac{1 - a_v^2}{1 - \frac{1}{k^2 a_v^2}} \\ &= kM \prod_{v=2,4,6,\dots}^{n-1} k^2 a_v^4 \prod_{v=2,4,6,\dots}^{n-1} \frac{1 - a_v^{-2}}{1 - k^2 a_v^2} \\ \lambda &= M^2 k^n \prod_{v=2,4,6,\dots}^{n-1} a_v^4. \end{aligned} \quad (137)$$

Setzt man nun die Darstellung für M nach Formel 135 in Gleichung 137 ein, dann erhält man recht schnell eine Darstellung für λ , die nur noch von den Koeffizienten a_v abhängt. Dazu werden Zähler und Nenner außerdem mit $k^2 a_v^2$ multipliziert und dann mittels $k \prod_{v=2,4,6,\dots}^{n-1} k^2 = k^n$ weiter vereinfacht.

4 Modultransformationen

$$\begin{aligned}
 \lambda &= (-1)^{\frac{n-1}{2}} k \prod_{v=2,4,6,\dots}^{n-1} \frac{1-a_v^2}{1-\frac{1}{k^2 a_v^2}} \cdot \frac{1-\frac{1}{a_v^2}}{1-k^2 a_v^2} \\
 &= (-1)^{\frac{n-1}{2}} k \prod_{v=2,4,6,\dots}^{n-1} k^2 \frac{1-a_v^2}{k^2 a_v^2 - 1} \cdot \frac{a_v^2 - 1}{1-k^2 a_v^2} \\
 \lambda &= (-1)^{\frac{n-1}{2}} k^n \prod_{v=2,4,6,\dots}^{n-1} \left(\frac{1-a_v^2}{1-k^2 a_v^2} \right)^2
 \end{aligned}$$

□

Wie auch in [Jac29, § 23] dargestellt, führt (unter Zuhilfenahme von Formel 134) Einsetzen der Koeffizientenbeziehung 126 zu der folgenden bekannten Form für λ :

$$\lambda = k^n \prod_{v=1,3,5,\dots}^{n-2} \operatorname{sn}^4\left(v\frac{K}{n}; k\right) = M^2 k^n \prod_{v=2,4,6,\dots}^{n-1} \operatorname{sn}^4\left(v\frac{K}{n}; k\right). \quad (138)$$

4.8.10 Das komplementäre Modul λ'

Die Beziehung zwischen den komplementären Modulen kann direkt aus Gleichung 132 abgelesen werden, wenn man dort den speziellen Wert $u = K$ (also $\operatorname{dn}(n\Lambda; \lambda) = \lambda'$) einsetzt.

$$\lambda' = k' \frac{\prod_{\mu=1,3,5,\dots}^{n-2} 1 - k^2 \operatorname{sn}^2\left(\mu\frac{K}{n}; k\right)}{\prod_{v=2,4,6,\dots}^{n-1} 1 - k^2 \operatorname{sn}^2\left(v\frac{K}{n}; k\right)} = k' \frac{\prod_{\mu=1,3,5,\dots}^{n-2} \operatorname{dn}^2\left(\mu\frac{K}{n}; k\right)}{\prod_{v=2,4,6,\dots}^{n-1} \operatorname{dn}^2\left(v\frac{K}{n}; k\right)}$$

Mit $\operatorname{dn}(K - u; k) = k' \operatorname{nd}(u; k)$ kann man diese Relation bei entsprechender Umindizierung sogar noch weiter vereinfachen.

$$\begin{aligned}
 \lambda' &= \frac{k' \prod_{\mu=1,3,5,\dots}^{n-2} k'^2}{\prod_{\mu=1,3,5,\dots}^{n-2} \operatorname{dn}^2\left[(n-\mu)\frac{K}{n}; k\right] \prod_{v=2,4,6,\dots}^{n-1} \operatorname{dn}^2\left(v\frac{K}{n}; k\right)} \\
 &= \frac{k'^n}{\prod_{v=2,4,6,\dots}^{n-1} \operatorname{dn}^4\left(v\frac{K}{n}; k\right)}
 \end{aligned}$$

4 Modultransformationen

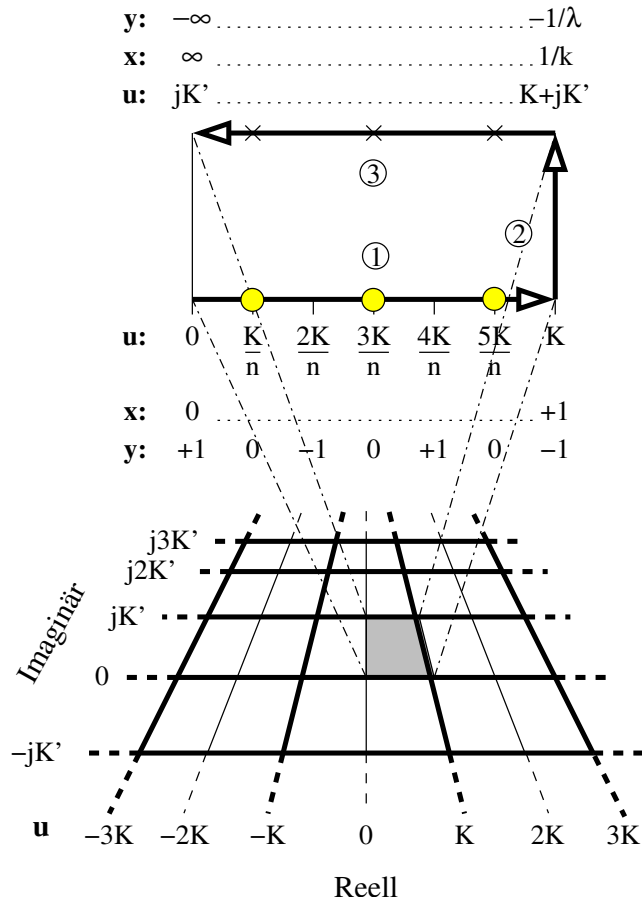


Abbildung 16: Verlauf von u in der komplexen Ebene ($n = 6$, gerade)

4.9 Erste elliptische Haupttransformation, n gerade

4.9.1 Funktionsverlauf

Für gerades $\gamma = n$ muß die Integrationskonstante C aus Abschnitt 4.5 die reelle Viertelperiode $C = \Omega/2 = M\Lambda$ annehmen (vgl. auch Tabelle 6),

$$y = \operatorname{sn}\left(\frac{u}{M} + \Lambda; \lambda\right) = \operatorname{cd}\left(\frac{u}{M}; \lambda\right) \quad (139)$$

damit $y = f(x; k)$ eine gerade Funktion und außerdem auf Wegabschnitt ② in Abbildung 8a reell ist. Der zugeordnete Verlauf des Parameters u (inklusive der positiven Nullstellen und Pole) ist dazu noch einmal anschaulich in Abbildung 16 illustriert.

Der Funktionsverlauf von $y = f(x; k)$ entspricht prinzipiell dem für ungerade n , nur der Funktionswert an der Stelle $x = 0$ ist wegen der Verschiebung entlang der reellen Achse $y = 1$ (siehe Abbildung 17).

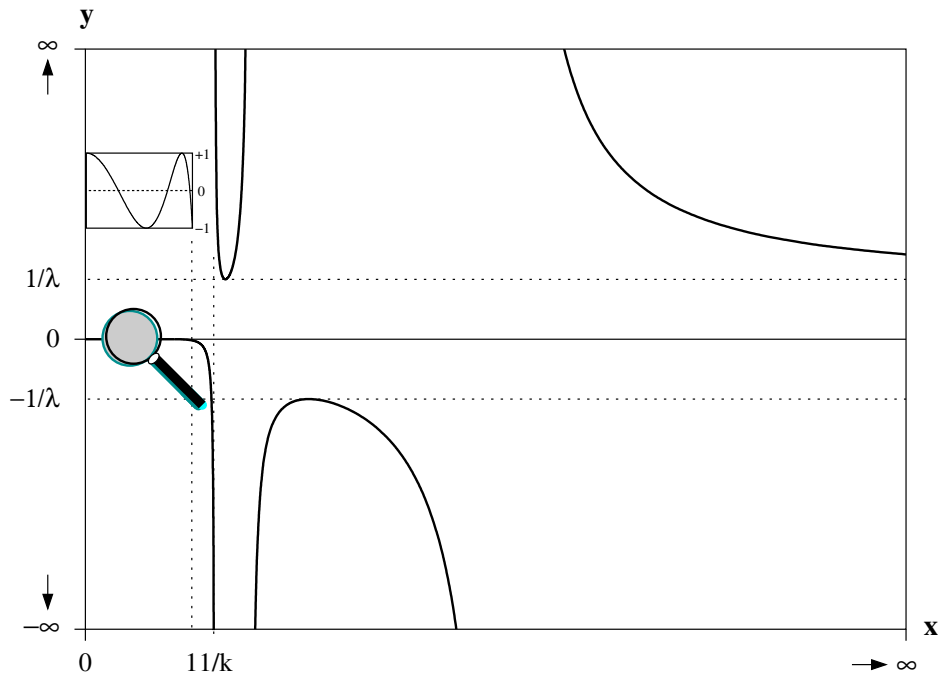


Abbildung 17: Erste elliptische Haupttransformation für $n = 6$

4.9.2 Rationale Lösungsfunktion

Aus den wichtigsten Eigenschaften der Differentialgleichung 70 sowie der Transformationsfunktion, welche in Abschnitt 4.5 erarbeitet wurden, kann man wiederum auf die Form der (diesmal geraden) rationalen Transformationsfunktion schließen [Ach70, Tab. XXII].

$$y = \frac{\left(1 - \frac{x^2}{a_1^2}\right)\left(1 - \frac{x^2}{a_3^2}\right)\left(1 - \frac{x^2}{a_5^2}\right)\cdots}{(1 - k^2 a_1^2 x^2)(1 - k^2 a_3^2 x^2)(1 - k^2 a_5^2 x^2)\cdots} = \prod_{v=1,3,5,\dots}^{n-1} \frac{1 - \frac{x^2}{a_v^2}}{1 - k^2 a_v^2 x^2} \quad (140)$$

Sie erfüllt unter anderem auch die speziellen Werte $f(0; k) = 1$ und $f(1; k) = (-1)^{n/2}$. Aus dem Funktionswert $f(0; k) = 1$ ergibt sich die noch erwähnenswerte Beziehung:⁴⁹

$$\prod_{v=1,3,5,\dots}^{n-1} a_v^2 = \prod_{v=1,3,5,\dots}^{n-1} \frac{1 - a_v^2}{1 - k^2 a_v^2}.$$

⁴⁹Diese Relation ist, wenn man die Koeffizientenformel kennt, auch sofort aus $\text{sn}\left(K - v\frac{K}{n}; k\right) = \text{cd}\left[v\frac{K}{n}; k\right]$ abzuleiten.

4.9.3 Nullstellen (Koeffizienten), Pole und Extremwerte

Wie schon Abbildung 16 anschaulich zeigt, ist die Lage der Pole und Nullstellen (gegenüber ungeradem Grad n) entsprechend der Integrationskonstante C um $\Omega/2 = M\Lambda$, also für u um K/n verschoben (vgl. Wegabschnitte ① und ③).

$$a_\nu = x_{\nu} = \operatorname{sn}\left(\nu\frac{K}{n}; k\right), \quad \nu = 1, 3, 5, \dots, n-1 \quad (141)$$

$$x_{\nu} = \frac{1}{k \operatorname{sn}\left(\nu\frac{K}{n}; k\right)} \geq \frac{1}{k} \quad (142)$$

Gleiches gilt auch für die Extremwerte

$$x_E = \begin{cases} \pm \operatorname{sn}\left(\nu\frac{K}{n}; k\right) \\ \pm \frac{1}{k} \operatorname{ns}\left(\nu\frac{K}{n}; k\right) \end{cases}, \quad \nu = 0, 2, 4, \dots, n-2$$

$$y_E = \begin{cases} \pm 1 \\ \pm \frac{1}{\lambda} \end{cases},$$

wobei einer der Werte für $\nu = 0$ bei $x \rightarrow \infty$ zu liegen kommt.

4.9.4 Beziehungen für die elliptischen Funktionen

Transformationsbeziehung für sn Die Transformationsbeziehung für den elliptischen Sinus ist wieder direkt in Gleichung 140 enthalten, wenn man x und y durch die entsprechenden elliptischen Funktionen ersetzt.

$$\operatorname{sn}\left(\frac{u}{M} + \Lambda; \lambda\right) = \prod_{\nu=1,3,5,\dots}^{n-1} \frac{1 - \frac{\operatorname{sn}^2(u; k)}{\operatorname{sn}^2(\nu K/n; k)}}{1 - k^2 \operatorname{sn}^2\left(\nu\frac{K}{n}; k\right) \operatorname{sn}^2(u; k)} \quad (143)$$

Eine weitere interessante Darstellung der Transformationsbeziehung 129 ergibt sich auch hier mit Hilfe von Multiplikationsformel 47.

4 Modultransformationen

$$\begin{aligned}
 \operatorname{sn}\left(\frac{u}{M} + \Lambda; \lambda\right) &= \prod_{v=1,3,5,\dots}^{n-1} \frac{1}{\operatorname{sn}^2\left(v\frac{K}{n}; k\right)} \cdot \frac{\operatorname{sn}^2\left(v\frac{K}{n}; k\right) - \operatorname{sn}^2(u; k)}{1 - k^2 \operatorname{sn}^2\left(v\frac{K}{n}; k\right) \operatorname{sn}^2(u; k)} \\
 &= (-1)^{\frac{n}{2}} \prod_{v=1,3,5,\dots}^{n-1} \frac{\operatorname{sn}\left(u + v\frac{K}{n}; k\right) \operatorname{sn}\left(u - v\frac{K}{n}; k\right)}{\operatorname{sn}^2\left(v\frac{K}{n}; k\right)} \\
 &= (-1)^{\frac{n}{2}} \sqrt{\frac{k^n}{\lambda}} \prod_{v=-(n-1), -(n-3), \dots}^{n-1} \operatorname{sn}\left(u + v\frac{K}{n}; k\right)
 \end{aligned}$$

Transformationsbeziehung für cn Ähnlich wie für den Fall eines ungeraden n (vgl. Abschnitt 4.8.7) kann man auch hier vorgehen und erhält in Folge

$$\operatorname{cn}\left(\frac{u}{M} + \Lambda; \lambda\right) = -\frac{\lambda'}{M} \operatorname{sn}(u; k) \operatorname{cn}(u; k) \frac{\prod_{\mu=2,4,6,\dots}^{n-2} \left(1 - \frac{\operatorname{sn}^2(u; k)}{\operatorname{sn}^2(\mu K/n; k)}\right)}{\prod_{v=1,3,5,\dots}^{n-1} \left(1 - k^2 \operatorname{sn}^2\left(v\frac{K}{n}; k\right) \operatorname{sn}^2(u; k)\right)}. \quad (144)$$

Beweis. Auch diesmal kann man die Gleichung für cn durch Betrachtung der Pole und Nullstellen herleiten (vgl. Abschnitt 4.8.7). Dazu geht man wieder von einem Ansatz aus, in welchem eigentlich nur ein Vorfaktor zu bestimmen ist.

$$1 - y^2 = \operatorname{cn}^2\left(\frac{u}{M} + \Lambda; \lambda\right) = A^2 \frac{\prod_{\mu=0,2,4,\dots}^{4n-2} x - \operatorname{sn}\left(\mu\frac{K}{n}; k\right)}{\prod_{v=1,3,5,\dots}^{n-1} \left[1 - k^2 \operatorname{sn}^2\left(v\frac{K}{n}; k\right) x^2\right]^2}$$

Wegen der Symmetrie des elliptischen Sinus um K , d. h. $\operatorname{sn}(K - u; k) = \operatorname{sn}(K + u; k)$ sowie der Spiegelungsbeziehung $\operatorname{sn}(2K - u; k) = -\operatorname{sn}(2K + u; k)$ kann vorher noch das Produkt im Zähler reduziert werden. Löst man dabei außerdem die Faktoren für $\mu = 0, n, 2n$ und $3n$ heraus, so ergibt sich

$$\operatorname{cn}^2\left(\frac{u}{M} + \Lambda; \lambda\right) = -A^2 x^2 (1 - x^2) \frac{\prod_{\mu=2,4,6,\dots}^{n-2} \left[x^2 - \operatorname{sn}^2\left(\mu\frac{K}{n}; k\right)\right]^2}{\prod_{v=1,3,5,\dots}^{n-1} \left[1 - k^2 \operatorname{sn}^2\left(v\frac{K}{n}; k\right) x^2\right]^2}.$$

Um den Vorfaktor A nun zu bestimmen, kann man z. B. den Funktionswert für $x \rightarrow \infty$ heranziehen, welcher schon zu $y = 1/\lambda$ ermittelt wurde.

4 Modultransformationen

$$1 - \frac{1}{\lambda^2} = \lim_{x \rightarrow \infty} -A^2 x^2 (1 - x^2) \frac{\prod_{\mu=2,4,6,\dots}^{n-2} [x^2 - \operatorname{sn}^2(\mu \frac{K}{n}; k)]^2}{\prod_{\nu=1,3,5,\dots}^{n-1} [1 - k^2 \operatorname{sn}^2(\nu \frac{K}{n}; k) x^2]^2}$$

$$\left(\frac{\lambda'}{\lambda}\right)^2 = - \lim_{x \rightarrow \infty} A^2 \left(\frac{1}{x^2} - 1\right) \frac{\prod_{\mu=2,4,6,\dots}^{n-2} \left[1 - \frac{\operatorname{sn}^2(\mu K/n; k)}{x^2}\right]^2}{\prod_{\nu=1,3,5,\dots}^{n-1} \left[\frac{1}{x^2} - k^2 \operatorname{sn}^2(\nu \frac{K}{n}; k)\right]^2}$$

$$A^2 = \left(\frac{\lambda'}{\lambda}\right)^2 \prod_{\nu=1,3,5,\dots}^{n-1} [k^2 \operatorname{sn}^2(\nu \frac{K}{n}; k)]^2$$

$$A^2 = \left(k^n \frac{\lambda'}{\lambda}\right)^2 \prod_{\nu=1,3,5,\dots}^{n-1} \operatorname{sn}^4(\nu \frac{K}{n}; k)$$

Einsetzen des gerade ermittelten Vorfaktors führt zu einer ersten geschlossenen Lösung

$$\operatorname{cn}\left(\frac{u}{M} + \Lambda; \lambda\right) = -k^n \frac{\lambda'}{\lambda} x \sqrt{1 - x^2} \prod_{\nu=1,3,5,\dots}^{n-1} \operatorname{sn}^2\left(\nu \frac{K}{n}; k\right) \frac{\prod_{\mu=2,4,6,\dots}^{n-2} x^2 - \operatorname{sn}^2\left(\mu \frac{K}{n}; k\right)}{\prod_{\nu=1,3,5,\dots}^{n-1} 1 - k^2 \operatorname{sn}^2\left(\nu \frac{K}{n}; k\right) x^2},$$

welche allerdings nicht gerade übersichtlich ist. Mit Vorgriff auf die Berechnungsformeln für λ und M (Gleichungen 146 und 147) und deren Beziehung zueinander

$$\frac{\lambda}{M} = (-1)^{\frac{n}{2}} k^n \prod_{\nu=1,3,5,\dots}^{n-1} \operatorname{sn}^2\left(\nu \frac{K}{n}; k\right) \prod_{\mu=2,4,6,\dots}^{n-2} \operatorname{sn}^2\left(\mu \frac{K}{n}; k\right)$$

ist man in der Lage, eine etwas kürzere Form anzugeben.

$$\operatorname{cn}\left(\frac{u}{M} + \Lambda; \lambda\right) = -\frac{\lambda'}{M} x \sqrt{1 - x^2} \frac{\prod_{\mu=2,4,6,\dots}^{n-2} 1 - \frac{x^2}{\operatorname{sn}^2\left(\mu \frac{K}{n}; k\right)}}{\prod_{\nu=1,3,5,\dots}^{n-1} 1 - k^2 \operatorname{sn}^2\left(\nu \frac{K}{n}; k\right) x^2}$$

□

Transformationsbeziehung für dn Die entsprechende Beziehung für dn lautet:

4 Modultransformationen

$$\operatorname{dn}\left(\frac{u}{M} + \Lambda; \lambda\right) = \lambda' \operatorname{dn}(u; k) \frac{\prod_{\substack{\mu=2,4,6,\dots \\ \mu \neq 2n}}^{n-2} 1 - k^2 \operatorname{sn}^2\left(\mu \frac{K}{n}; k\right) \operatorname{sn}^2(u; k)}{\prod_{\nu=1,3,5,\dots}^{n-1} 1 - k^2 \operatorname{sn}^2\left(\nu \frac{K}{n}; k\right) \operatorname{sn}^2(u; k)}. \quad (145)$$

Beweis. Auch hier geht man am besten wieder von den Nullstellen aus, welche entsprechend der Definition für die elliptische Delta-Amplitude dort liegen müssen, wo $\operatorname{sn}(u/M + \Lambda; \lambda)$ den Wert $1/\lambda$ annimmt. Genau diese Stellen haben wir aber schon als Extremwerte des Funktionsverlaufes dieser Transformation erkannt. Sie liegen bei $x_E = \pm k^{-1} \operatorname{ns}(\mu K/n; k)$ mit $\mu = 0, \pm 2, \pm 4, \dots$, was folgenden Ansatz für eine Linearfaktordarstellung rechtfertigt

$$1 - \lambda^2 y^2 = \operatorname{dn}^2\left(\frac{u}{M} + \Lambda; \lambda\right) = B^2 \frac{\prod_{\substack{\mu=2,4,6,\dots \\ \mu \neq 2n}}^{4n-2} \left[x - k^{-1} \operatorname{ns}\left(\mu \frac{K}{n}; k\right) \right]}{\prod_{\nu=1,3,5,\dots}^{n-1} \left[1 - k^2 \operatorname{sn}^2\left(\nu \frac{K}{n}; k\right) x^2 \right]^2}.$$

Wieder berücksichtigen wir, daß $\operatorname{sn}(u; k)$ eine ungerade Funktion mit der Halbperiode $2K$ ist und extrahieren außerdem den speziellen Wert $\operatorname{ns}(\mu K/n; k) = \pm 1$ für die Indizes $\mu = n, 3n$.

$$\operatorname{dn}^2\left(\frac{u}{M} + \Lambda; \lambda\right) = B^2 (x^2 - k^{-2}) \frac{\prod_{\mu=2,4,6,\dots}^{n-2} \left[x^2 - k^{-2} \operatorname{ns}^2\left(\mu \frac{K}{n}; k\right) \right]^2}{\prod_{\nu=1,3,5,\dots}^{n-1} \left[1 - k^2 \operatorname{sn}^2\left(\nu \frac{K}{n}; k\right) x^2 \right]^2}$$

Der Vorfaktor kann z. B. durch Einsetzen des Funktionswertes an der Stelle $u = 0$, d. h. $y = f(0; k) = 1$ bestimmt werden.

$$1 - \lambda^2 = -B^2 k^{-2} \prod_{\mu=2,4,6,\dots}^{n-2} \left[k^{-2} \operatorname{ns}^2\left(\mu \frac{K}{n}; k\right) \right]^2$$

$$B^2 = -\lambda'^2 k^{2(n-1)} \prod_{\mu=2,4,6,\dots}^{n-2} \operatorname{sn}^4\left(\mu \frac{K}{n}; k\right)$$

Mit diesem Ausdruck für B kann man nun die Transformationsbeziehung für $\operatorname{dn}(u/M + \Lambda; \lambda)$ konkretisieren.

4 Modultransformationen

$$\begin{aligned} \operatorname{dn}^2\left(\frac{u}{M} + \Lambda; \lambda\right) &= \lambda'^2 (1 - k^2 x^2) \frac{\prod_{\mu=2,4,6,\dots}^{n-2} \left[1 - k^2 \operatorname{sn}^2\left(\mu \frac{K}{n}; k\right) x^2\right]^2}{\prod_{\nu=1,3,5,\dots}^{n-1} \left[1 - k^2 \operatorname{sn}^2\left(\nu \frac{K}{n}; k\right) x^2\right]^2} \\ \operatorname{dn}\left(\frac{u}{M} + \Lambda; \lambda\right) &= \lambda' \operatorname{dn}(u; k) \frac{\prod_{\mu=2,4,6,\dots}^{n-2} 1 - k^2 \operatorname{sn}^2\left(\mu \frac{K}{n}; k\right) \operatorname{sn}^2(u; k)}{\prod_{\nu=1,3,5,\dots}^{n-1} 1 - k^2 \operatorname{sn}^2\left(\nu \frac{K}{n}; k\right) \operatorname{sn}^2(u; k)} \end{aligned}$$

□

4.9.5 Das Modul λ

Das Modul λ kann auf den verschiedensten Wegen bestimmt werden, z. B. auch wieder aus der Eigenschaft der Invarianz von Differentialgleichung 69 für $x := 1/kx$ und $y := 1/\lambda y$ nach Formel 81.

$$\lambda = k^n \prod_{\nu=1,3,5,\dots}^{n-1} \operatorname{sn}^4\left(\nu \frac{K}{n}; k\right) \quad (146)$$

Beweis. An dieser Stelle soll zur Abwechslung ein anderer, ebenfalls sehr einfacher Weg, beschrieben werden. Dazu evaluiert man Transformationsbeziehung 140 am Extremwert $x_E \rightarrow \infty$, wo bekanntlich $y_E = 1/\lambda$ gelten muß.

$$\begin{aligned} \frac{1}{\lambda} &= \lim_{x \rightarrow \infty} \prod_{\nu=1,3,5,\dots}^{n-1} \frac{1 - \frac{x^2}{a_\nu^2}}{1 - k^2 a_\nu^2 x^2} \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \prod_{\nu=1,3,5,\dots}^{n-1} \frac{\frac{1}{x^2} - \frac{1}{a_\nu^2}}{\frac{1}{x^2} - k^2 a_\nu^2} \\ &= \prod_{\nu=1,3,5,\dots}^{n-1} \frac{1}{k^2 a_\nu^4} \\ &= k^n \prod_{\nu=1,3,5,\dots}^{n-1} \operatorname{sn}^4\left(\nu \frac{K}{n}; k\right) \end{aligned}$$

□

4.9.6 Der Multiplikator M

Der Multiplikator M hat im Fall eines geraden n den Wert

$$M = (-1)^{\frac{n}{2}} \cdot \frac{\prod_{\nu=1,3,5,\dots}^{n-1} \operatorname{sn}^2\left(\nu\frac{K}{n}; k\right)}{\prod_{\mu=2,4,6,\dots}^{n-2} \operatorname{sn}^2\left(\mu\frac{K}{n}; k\right)}. \quad (147)$$

Beweis. Der Multiplikator M kann diesmal nicht durch einfaches Einsetzen spezieller Werte ermittelt werden, da er in der rationalen Form 140 nicht auftaucht. Statt dessen wird hier die erste Ableitung der elliptischen als auch der rationalen Transformationsbeziehung herangezogen und mit deren Hilfe M bestimmt. Zuerst wenden wir uns deshalb dem Ausgangsproblem der Transformationstheorie, nämlich Differentialgleichung 71 zu. Um einen relativ einfachen Lösungsweg zu beschreiten, konzentrieren wir uns dabei auf die Nullstellen x_m bzw. u_m mit $u_m = mK/n = mM\Lambda$ (m ungerade).

$$y' = f'(x_m; k) = \frac{1}{M \sqrt{(1-x_m^2)(1-k^2x_m^2)}}$$

Aus dieser Gleichung kann man, wenn $f'(x_m; k)$ bekannt ist, sofort den Parameter M ermitteln.

$$M = \frac{1}{f'(x_m; k) \operatorname{cn}(u_m; k) \operatorname{dn}(u_m; k)} \quad (148)$$

Die erste Ableitung der rationalen Transformationsbeziehung 140 kann durch logarithmische Differentiation gewonnen werden. Dazu seien vorab noch die folgenden Kurzformen vereinbart und ihre Ableitungen gebildet.

$$\begin{aligned} p_\nu(x) &= 1 - \frac{x^2}{a_\nu^2} & p'_\nu(x) &= -\frac{2x}{a_\nu^2} \\ q_\nu(x) &= 1 - k^2 a_\nu^2 x^2 & q'_\nu(x) &= -2k^2 a_\nu^2 x \end{aligned}$$

Es folgt die eigentliche Differentiation von

$$\ln y = \ln \prod_{\nu=1,3,5,\dots}^{n-1} \frac{p_\nu(x)}{q_\nu(x)}$$

zu

4 Modultransformationen

$$\begin{aligned} \frac{f'(x_m; k)}{f(x_m; k)} &= \sum_{\mu=1,3,5,\dots}^{n-1} \left[\frac{p_\mu(x)}{q_\mu(x)} \right]' \frac{q_\mu(x)}{p_\mu(x)} \\ f'(x_m; k) &= \prod_{v=1,3,5,\dots}^{n-1} \left[\frac{p_v(x)}{q_v(x)} \right] \sum_{\mu=1,3,5,\dots}^{n-1} \left[\frac{p_\mu(x)}{q_\mu(x)} \right]' \cdot \frac{q_\mu(x)}{p_\mu(x)} \\ &= \prod_{v=1,3,5,\dots}^{n-1} \left[\frac{p_v(x)}{q_v(x)} \right] \sum_{\mu=1,3,5,\dots}^{n-1} \frac{p'_\mu(x)q_\mu(x) - q'_\mu(x)p_\mu(x)}{p_\mu(x)q_\mu(x)}. \end{aligned}$$

Setzt man jetzt die Nullstelle x_m ein, dann verschwindet $p_m(x_m)$ und demzufolge (eigentlich) das ganze Produkt $\prod_{v=1,3,5,\dots}^{n-1} p_v(x)/q_v(x)$. Da in diesem Fall aber der Summenterm mit $\mu = m$ eine behebbare Unbestimmtheit aufweist (Kürzen von $p_m(x)$ im Produkt mit $p_\mu(x)$ im Nenner der Summe), verschwindet der Summenausdruck. Dabei gilt es $p'_m(x_m) = -2/x_m$ zu berücksichtigen.

$$\begin{aligned} f'(x_m; k) &= \left[\frac{p'_m(x_m)}{p_m(x_m)} - \frac{q'_m(x_m)}{q_m(x_m)} \right] \prod_{v=1,3,5,\dots}^{n-1} \frac{p_v(x_m)}{q_v(x_m)} \\ &= \frac{p'_m(x_m)}{p_m(x_m)} \prod_{v=1,3,5,\dots}^{n-1} \frac{p_v(x_m)}{q_v(x_m)} \\ &= -\frac{2}{x_m} \cdot \frac{1}{q_m(x_m)} \prod_{\substack{v=1,3,5,\dots \\ v \neq m}}^{n-1} \frac{p_v(x_m)}{q_v(x_m)} \\ &= -\frac{2}{\operatorname{sn}(u_m; k)} \cdot \frac{1}{1 - k^2 \operatorname{sn}^4(u_m; k)} \prod_{\substack{v=1,3,5,\dots \\ v \neq m}}^{n-1} \frac{1 - \frac{\operatorname{sn}^2(u_m; k)}{\operatorname{sn}^2(u_v; k)}}{1 - k^2 \operatorname{sn}^2(u_v; k) \operatorname{sn}^2(u_m; k)} \end{aligned}$$

Durch Hinzunahme von Multiplikationsformel 47, kann man (ähnlich wie bei der Transformationsbeziehung) weiter vereinfachen zu:

4 Modultransformationen

$$\begin{aligned}
 f'(x_m; k) &= \frac{(-2)^{\frac{n}{2}}}{\operatorname{sn}\left(m\frac{K}{n}; k\right)\left[1 - k^2 \operatorname{sn}^4\left(m\frac{K}{n}; k\right)\right]} \prod_{\substack{v=1,3,5,\dots \\ v \neq m}}^{n-1} \frac{\operatorname{sn}\left[(m-v)\frac{K}{n}; k\right] \operatorname{sn}\left[(m+v)\frac{K}{n}; k\right]}{\operatorname{sn}^2\left(v\frac{K}{n}; k\right)} \\
 &= \frac{(-2)^{\frac{n}{2}} \prod_{\substack{v=1,3,5,\dots \\ v \neq m}}^{n-1} \operatorname{sn}\left[(m-v)\frac{K}{n}; k\right] \operatorname{sn}\left[(m+v)\frac{K}{n}; k\right]}{\operatorname{sn}\left(m\frac{K}{n}; k\right)\left[1 - k^2 \operatorname{sn}^4\left(m\frac{K}{n}; k\right)\right] \prod_{\substack{v=1,3,5,\dots \\ v \neq m}}^{n-1} \operatorname{sn}^2\left(v\frac{K}{n}; k\right)} \\
 &= \frac{(-2)^{\frac{n}{2}} \operatorname{sn}\left(m\frac{K}{n}; k\right) \prod_{\substack{v=1,3,5,\dots \\ v \neq m}}^{n-1} \operatorname{sn}\left[(m-v)\frac{K}{n}; k\right] \operatorname{sn}\left[(m+v)\frac{K}{n}; k\right]}{\left[1 - k^2 \operatorname{sn}^4\left(m\frac{K}{n}; k\right)\right] \prod_{v=1,3,5,\dots}^{n-1} \operatorname{sn}^2\left(v\frac{K}{n}; k\right)}.
 \end{aligned}$$

Die Indizes $m - v$ bzw. $m + v$ durchlaufen, wenn man sie zusammenfaßt, alle geraden Werte von $m - (n - 1)$ bis $m + (n - 1)$, ausgenommen die Werte 0 und $2m$, für die $v = m$ gilt. Mit etwas Vorstellungskraft für den Verlauf des elliptischen Sinus und den daraus generierten Nullstellen und Extremwerten ist offensichtlich, daß (abgesehen von den zwei genannten) alle Werte $\mu K/n$ (für gerades μ) einer Halbperiode des elliptischen Sinus' durchlaufen werden. Der Produktterm im Zähler ist demzufolge auch darstellbar als

$$\prod_{\substack{v=1,3,5,\dots \\ v \neq m}}^{n-1} \operatorname{sn}\left[(m-v)\frac{K}{n}; k\right] \operatorname{sn}\left[(m+v)\frac{K}{n}; k\right] = \frac{\left[\prod_{\mu=2,4,\dots}^{n-2} \operatorname{sn}\left(\mu\frac{K}{n}; k\right)\right]^2}{\operatorname{sn}\left(2m\frac{K}{n}; k\right)}.$$

Der Ausdruck im Nenner dieser Gleichung kann durch Anwendung der Verdoppelungsformel 51 so angepaßt werden

$$\prod_{\substack{v=1,3,5,\dots \\ v \neq m}}^{n-1} \operatorname{sn}\left[(m-v)\frac{K}{n}; k\right] \operatorname{sn}\left[(m+v)\frac{K}{n}; k\right] = \frac{\left[1 - k^2 \operatorname{sn}^4\left(m\frac{K}{n}; k\right)\right] \left[\prod_{\mu=2,4,\dots}^{n-2} \operatorname{sn}\left(\mu\frac{K}{n}; k\right)\right]^2}{2 \operatorname{sn}\left(m\frac{K}{n}; k\right) \operatorname{cn}\left(m\frac{K}{n}; k\right) \operatorname{dn}\left(m\frac{K}{n}; k\right)}$$

daß die Ableitung an einer Nullstelle nun geschlossen dargestellt werden kann.

$$f'(x_m; k) = \frac{(-1)^{\frac{n}{2}} \prod_{\mu=2,4,\dots}^{n-2} \operatorname{sn}^2\left(\mu\frac{K}{n}; k\right)}{\operatorname{cn}\left(m\frac{K}{n}; k\right) \operatorname{dn}\left(m\frac{K}{n}; k\right) \prod_{v=1,3,5,\dots}^{n-1} \operatorname{sn}^2\left(v\frac{K}{n}; k\right)} \quad (149)$$

4 Modultransformationen

Einsetzen in Berechnungsformel 148 liefert (endlich) den Multiplikator M .

$$M = (-1)^{\frac{n}{2}} \frac{\prod_{\nu=1,3,5,\dots}^{n-1} \operatorname{sn}^2\left(\nu \frac{K}{n}; k\right)}{\prod_{\mu=2,4,6,\dots}^{n-2} \operatorname{sn}^2\left(\mu \frac{K}{n}; k\right)}$$

□

4.9.7 Das komplementäre Modul k'

Die Formel für das komplementäre Modul k' kann durch Evaluation der Beziehung 145 für dn an der Stelle $y = f(1; k) = (-1)^{n/2}$ ermittelt werden.

$$k' = \frac{\prod_{\nu=1,3,5,\dots}^{n-1} 1 - k^2 \operatorname{sn}^2\left(\nu \frac{K}{n}; k\right)}{\prod_{\mu=2,4,6,\dots}^{n-2} 1 - k^2 \operatorname{sn}^2\left(\mu \frac{K}{n}; k\right)}$$

4.10 Zweite elliptische Haupttransformation, n ungerade

4.10.1 Periodenbeziehungen

Typisch für die 2. elliptische Transformation ist, daß die imaginäre Periode $2\Omega' = 2M\Lambda'$ von $y = g(u/M; \lambda)$ genau n -mal die imaginäre Periode $2\omega' = 2K'$ von $x = h(u; k)$ teilt, die reellen Perioden aber gleich sind (n -te Teilung der imaginären Periode, vgl. Fall $\gamma = 1$, $\delta = n$ in Abschnitt 4.5). Es handelt sich bei der Beziehung $\lambda = \rho(k)$ also ebenfalls um eine Modulgleichung vom Grad n mit dem zugehörigen Periodenverhältnis

$$\frac{\Lambda}{\Lambda'} = n \frac{K}{K'}. \quad (150)$$

Allerdings kommt wegen $\gamma = 1$ nur der Wert $C = 0$ für die Integrationskonstante (vgl. Abschnitt 4.5) in Frage, damit reelle Funktionswerte auf Wegabschnitt ② in Abbildung 8a bzw. nach Tabelle 5 entstehen.

4.10.2 Funktionsverlauf

Der Funktionsverlauf $y = f(x; k)$ kann mit Hilfe von Abbildung 18 aus dem Verlauf des Parameters u entsprechend der, in Abbildung 8a definierten, Wegabschnitte erklärt werden. Auf

4 Modultransformationen

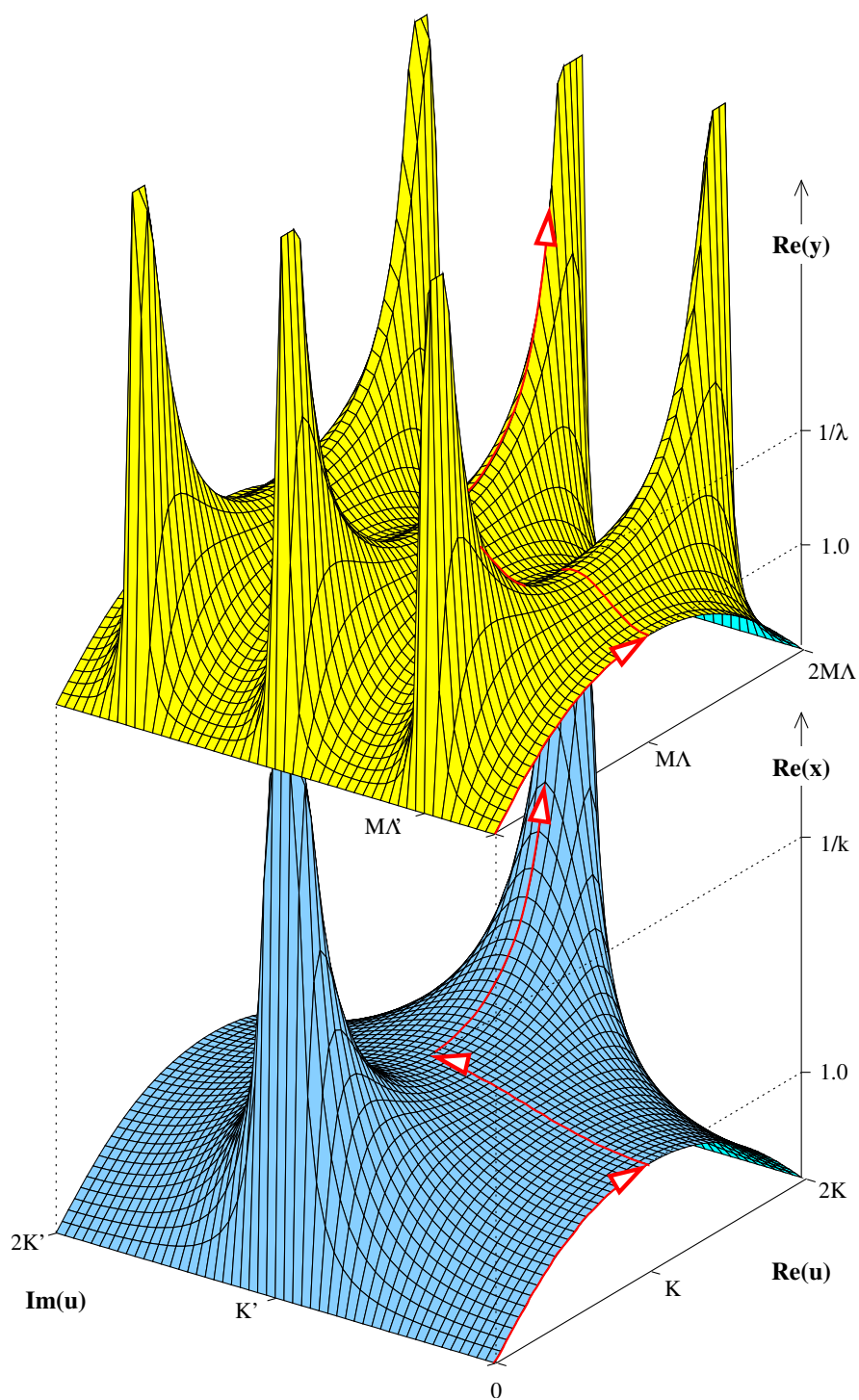


Abbildung 18: Parameterdarstellung der 2. elliptischen Transformation ($n = 3$)

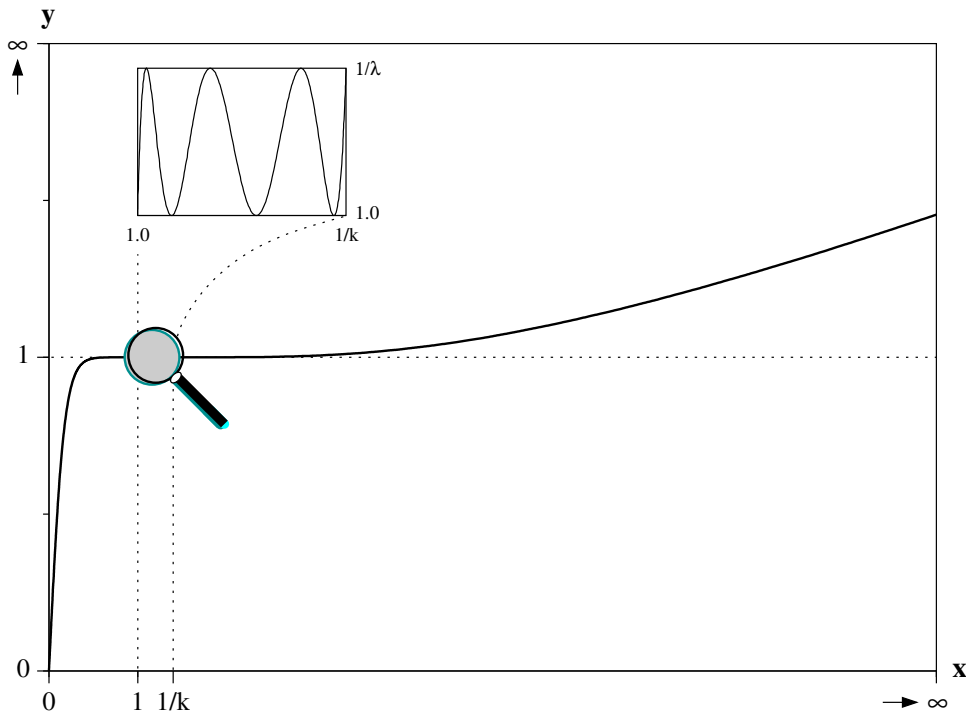


Abbildung 19: Zweite elliptische Haupttransformation ($n = 7$)

Abschnitt ① verlaufen x und y ausgehend vom Ursprung im Wesen gleich. Da im Intervall $K \leq u \leq K + jK'$, d. h. auf Teilstück ②, die imaginäre Halbperiode $M\Lambda'$ von $y = g(u/M; \lambda)$ n -mal durchlaufen wird, existieren dort keine reellen Nullstellen oder Pole. Statt dessen alterniert $y = nd(\text{Im}(u)/M; \lambda')$ auf dem Weg $1 \leq x \leq 1/k$ genau $n - 1$ mal zwischen 1 und $1/\lambda$. Auf dem letzten Teilabschnitt ③ strebt y dann kontinuierlich gegen ∞ .

Der resultierende Funktionsverlauf $y = f(x; k)$ ist in Abbildung 19 dargestellt.

4.10.3 Rationale Lösungsfunktion

Die Form der rationalen Lösungsfunktion $y = f(x; k)$ für die zweite elliptische Haupttransformation bei ungeradem Grad n kann ausgehend von Abbildung 18 sowie den folgenden Überlegungen abgeleitet werden.

1. Es existieren eine einfache Nullstelle⁵⁰ bei $u = 0$ sowie $n - 1$ weitere bei jeweils $u_\mu = \pm j\mu M\Lambda' = \pm j\mu K'/n$, μ gerade.
2. Die $n - 1$ Pole liegen bei $u_\nu = \pm j\nu M\Lambda' = \pm j\nu K'/n$, ν ungerade.
3. Für $u \rightarrow 2K + jK'$ geht y gegen Unendlich, was sich im Grad von Zähler- und Nennerpolynom widerspiegelt ($n = n' + 1$, vgl. Abschnitt 4.3).

⁵⁰Die Nullstelle ist deshalb einfach, weil die weiteren Ableitungen an dieser Stelle nicht verschwinden.

4 Modultransformationen

4. Sowohl $y = g(u; k)$ als auch $x = h(u; k)$ sind ungerade Funktionen, deshalb $y = f(x; k)$ ebenfalls.

Aus diesen Gründen kann man als rationale Transformationsfunktion

$$y = \operatorname{sn}\left(\frac{u}{M}; \lambda\right) = \frac{x}{M} \cdot \frac{\prod_{\mu=2,4,6,\dots}^{n-1} \left(1 + \frac{x^2}{a_\mu^2}\right)}{\prod_{\nu=1,3,5,\dots}^{n-2} \left(1 + \frac{x^2}{a_\nu^2}\right)} \quad (151)$$

mit

$$a_\eta = \operatorname{sc}\left(\eta \frac{K'}{n}; k'\right) \quad (152)$$

angeben.

Beweis. Die vorangegangenen Überlegungen erlauben es, als Ausgangspunkt für die Lösungsformel folgende Form anzugeben.

$$y = Ax \frac{\prod_{\mu=1}^{n-1} (x - x_{\mu})}{\prod_{\nu=1}^{n-1} (x - x_{\nu})}$$

Nimmt man die konkreten Werte der Pole und Nullstellen hinzu

$$\begin{aligned} x_{\mu} &= \operatorname{sn}\left(j\mu \frac{K'}{n}; k\right) = \operatorname{jsc}\left(\mu \frac{K'}{n}; k'\right) = ja_{\mu} \\ x_{\nu} &= \operatorname{sn}\left(j\nu \frac{K'}{n}; k\right) = \operatorname{jsc}\left(\nu \frac{K'}{n}; k'\right) = ja_{\nu} \end{aligned}$$

und berücksichtigt das betragsmäßig doppelte Auftreten aller Nullstellen und Pole,⁵¹ dann läßt sich die Ausgangsformel konkretisieren.

$$y = Ax \frac{\prod_{\mu=2,4,6,\dots}^{n-1} (x^2 + a_\mu^2)}{\prod_{\nu=1,3,5,\dots}^{n-2} (x^2 + a_\nu^2)} = Ax \frac{\prod_{\mu=2,4,6,\dots}^{n-1} a_\mu^2}{\prod_{\nu=1,3,5,\dots}^{n-2} a_\nu^2} \cdot \frac{\prod_{\mu=2,4,6,\dots}^{n-1} \left(1 + \frac{x^2}{a_\mu^2}\right)}{\prod_{\nu=1,3,5,\dots}^{n-2} \left(1 + \frac{x^2}{a_\nu^2}\right)}$$

□

⁵¹Und denkt außerdem an die imaginäre Transformation des elliptischen Sinus' nach Gleichung 57.

4 Modultransformationen

Eine weitere bekannte Form der Transformationsbeziehung 151 ist:⁵²

$$y = \frac{x}{M} \prod_{\mu=2,4,6,\dots}^{n-1} \frac{1 + \frac{x^2}{a_\mu^2}}{1 + k^2 a_\mu^2 x^2} = \frac{x}{M} \prod_{\nu=1,3,5,\dots}^{n-2} \frac{1 + k^2 a_\nu^2 x^2}{1 + \frac{x^2}{a_\nu^2}}. \quad (153)$$

Beweis. Beide Darstellungen sind schnell zu beweisen, wenn man auf jeden Faktor im Zähler bzw. Nenner von Gleichung 151 die Beziehung $\text{sc}(K' - u; k') = k^{-1} \text{cs}(u; k')$ nach [AS72, 16.8] anwendet und danach geeignet umindiziert. Beispielhaft wird hier die beschriebene Umformung für den Nenner durchgeführt, wobei der neue Index $\mu = n - \nu$ eingeführt wird.

$$\begin{aligned} y &= \frac{x}{M} \cdot \frac{\prod_{\mu=2,4,6,\dots}^{n-1} \left(1 + \frac{x^2}{a_\mu^2}\right)}{\prod_{\nu=1,3,5,\dots}^{n-2} \left(1 + \frac{x^2}{\text{sc}^2\left(\nu \frac{K'}{n}; k'\right)}\right)} \\ &= \frac{x}{M} \cdot \frac{\prod_{\mu=2,4,6,\dots}^{n-1} \left(1 + \frac{x^2}{a_\mu^2}\right)}{\prod_{\mu=2,4,6,\dots}^{n-1} \left(1 + k^2 \text{sc}^2\left(\mu \frac{K'}{n}; k'\right) x^2\right)} \\ &= \frac{x}{M} \prod_{\mu=2,4,6,\dots}^{n-1} \frac{1 + \frac{x^2}{a_\mu^2}}{1 + k^2 a_\mu^2 x^2} \end{aligned}$$

□

4.10.4 Nullstellen (Koeffizienten)

Die Nullstellen waren der Ausgangspunkt bei der Ermittlung der Koeffizienten von Nenner- und Zählerpolynom in Transformationsbeziehung 151 bzw. 125. Sie liegen in diesem Fall nicht direkt auf den schon desöfteren betrachteten Wegabschnitten ① - ③ von u , sondern auf imaginären Punkten innerhalb des Periodenrechtecks (vgl. auch Abbildung 18 sowie imaginäre Transformation nach Gleichung 57, Abschnitt 57).

$$x_\mu = ja_\mu = j \text{sc}\left(\mu \frac{K'}{n}; k'\right), \quad \mu = 2, 4, 6, \dots, n-1.$$

⁵²Sie entspricht genau Transformationsbeziehung 125 für die erste elliptische Haupttransformation bei ungeradem Grad n , wenn man dort imaginäre Koeffizienten ansetzt.

4.10.5 Polstellen

Die $n - 1$ Pole wurden (wie die Nullstellen auch) schon bei der Herleitung der rationalen Transformationsbeziehung bestimmt. Sie sind jedoch auch leicht aus Gleichung 151 abzulesen.⁵³

$$1 + \frac{x_{\times v}^2}{a_v^2} = 0$$

$$x_{\times v} = \text{jsc}\left(\nu \frac{K'}{n}; k'\right), \quad \nu = 1, 3, 5, \dots, n-2$$

4.10.6 Extremwerte

Die lokalen Extremwerte, welche auch in Abbildung 19 zu erkennen sind, liegen bei

$$x_E = \text{sn}(u_E; k) = \pm \text{nd}\left(\nu \frac{K'}{n}; k'\right), \quad |\nu| = 0, 1, 2, 3, \dots, n-1$$

$$y_E = \text{sn}\left(\frac{u_E}{M}; \Lambda\right) = \begin{cases} 1 \\ \frac{1}{\lambda} \end{cases} .$$

4.10.7 Beziehung für sn

Einsetzen der Koeffizientenformel 152 in die rationale Transformationsbeziehung 153 führt zu den elliptischen Darstellungen

$$y = \frac{\text{sn}(u; k)}{M} \frac{\prod_{\mu=2,4,6,\dots}^{n-1} \frac{1 + \text{cs}^2\left(\mu \frac{K'}{n}; k'\right) \text{sn}^2(u; k)}{1 + k^2 \text{sc}^2\left(\mu \frac{K'}{n}; k'\right) \text{sn}^2(u; k)}}{\prod_{\nu=1,3,5,\dots}^{n-2} \frac{1 + k^2 \text{sc}^2\left(\nu \frac{K'}{n}; k'\right) \text{sn}^2(u; k)}{1 + \text{cs}^2\left(\nu \frac{K'}{n}; k'\right) \text{sn}^2(u; k)}}$$

$$= \frac{\text{sn}(u; k)}{M} \frac{\prod_{\mu=2,4,6,\dots}^{n-1} \frac{1 + \text{cs}^2\left(\mu \frac{K'}{n}; k'\right) \text{sn}^2(u; k)}{1 + k^2 \text{sc}^2\left(\mu \frac{K'}{n}; k'\right) \text{sn}^2(u; k)}}{\prod_{\nu=1,3,5,\dots}^{n-2} \frac{1 + \text{cs}^2\left(\nu \frac{K'}{n}; k'\right) \text{sn}^2(u; k)}{1 + k^2 \text{sc}^2\left(\nu \frac{K'}{n}; k'\right) \text{sn}^2(u; k)}}$$

Die Formeln für den elliptischen Cosinus und die Delta-Amplitude kann man z. B. [Ach70, Tab. XXIII] entnehmen.

⁵³Oder wieder Beziehung 85 berücksichtigt: $x_{\times \nu} \cdot x_{\nu} = 1/k$.

4 Modultransformationen

4.10.8 Der Multiplikator M

Der Multiplikator M kann durch Evaluation der Transformationsgleichung 151 oder 153 an der Stelle $y = f(1; k) = 1$ gewonnen werden.

$$M = \frac{\prod_{\mu=2,4,6,\dots}^{n-1} 1 + \frac{1}{a_\mu^2}}{\prod_{\nu=1,3,5,\dots}^{n-2} 1 + \frac{1}{a_\nu^2}} = \prod_{\mu=2,4,6,\dots}^{n-1} \frac{1 + \frac{1}{a_\mu^2}}{1 + k^2 a_\mu^2} = \prod_{\nu=1,3,5,\dots}^{n-2} \frac{1 + k^2 a_\nu^2}{1 + \frac{1}{a_\nu^2}} \quad (154)$$

Einsetzen der Koeffizientenformel 152 führt zu einer weiteren, bekannten Darstellung des Multiplikators M .

$$M = \frac{\prod_{\nu=1,3,5,\dots}^{n-2} \operatorname{sn}^2\left(\nu \frac{K'}{n}; k'\right)}{\prod_{\mu=2,4,6,\dots}^{n-1} \operatorname{sn}^2\left(\mu \frac{K'}{n}; k'\right)} \quad (155)$$

Beweis. Der Beweis ist nicht schwierig, wenn man $\operatorname{sn}^2 u + \operatorname{cn}^2 u = 1$ berücksichtigt.

$$\begin{aligned} M &= \frac{\prod_{\mu=2,4,6,\dots}^{n-1} 1 + \frac{\operatorname{cn}^2(\mu K'/n; k')}{\operatorname{sn}^2(\mu K'/n; k')}}{\prod_{\nu=1,3,5,\dots}^{n-2} 1 + \frac{\operatorname{cn}^2(\nu K'/n; k')}{\operatorname{sn}^2(\nu K'/n; k')}} \\ &= \frac{\prod_{\mu=2,4,6,\dots}^{n-1} \frac{\operatorname{sn}^2(\mu K'/n; k') + \operatorname{cn}^2(\mu K'/n; k')}{\operatorname{sn}^2(\mu K'/n; k')}}{\prod_{\nu=1,3,5,\dots}^{n-2} \frac{\operatorname{sn}^2(\nu K'/n; k') + \operatorname{cn}^2(\nu K'/n; k')}{\operatorname{sn}^2(\nu K'/n; k')}} \\ &= \frac{\prod_{\mu=2,4,6,\dots}^{n-1} \frac{1}{\operatorname{sn}^2(\mu K'/n; k')}}{\prod_{\nu=1,3,5,\dots}^{n-2} \frac{1}{\operatorname{sn}^2(\nu K'/n; k')}} = \frac{\prod_{\nu=1,3,5,\dots}^{n-2} \operatorname{sn}^2\left(\nu \frac{K'}{n}; k'\right)}{\prod_{\mu=2,4,6,\dots}^{n-1} \operatorname{sn}^2\left(\mu \frac{K'}{n}; k'\right)} \end{aligned}$$

□

4.10.9 Das Modul λ'

Das Modul λ kann auf gleichem Wege wie der Multiplikator M bestimmt werden, nur wird dazu der schon bekannte Funktionswert $y = f(1/k; k) = 1/\lambda$ herangezogen, vgl. 18. Evaluation von Transformationsbeziehung 151 an dieser Stelle ergibt sofort

4 Modultransformationen

$$\lambda = kM \frac{\prod_{v=1,3,5,\dots}^{n-2} 1 + \frac{1}{k^2 a_v^2}}{\prod_{\mu=2,4,6,\dots}^{n-1} 1 + \frac{1}{k^2 a_\mu^2}}.$$

Wieder sind die Beziehungen $\operatorname{sc}(K' - u; k') = k^{-1} \operatorname{cs}(u; k')$ sowie $\operatorname{sn}^2 u + \operatorname{cn}^2 u = 1$ gefolgt von Umindizierung im Zähler und Nenner günstig anwendbar, um ausführliche Darstellungen zu entwickeln.

$$\begin{aligned} \lambda &= kM \frac{\prod_{\mu=2,4,6,\dots}^{n-1} 1 + \operatorname{sc}^2\left(\mu \frac{K'}{n}; k'\right)}{\prod_{v=1,3,5,\dots}^{n-2} 1 + \operatorname{sc}^2\left(v \frac{K'}{n}; k'\right)} \\ &= kM \frac{\prod_{v=1,3,5,\dots}^{n-2} \operatorname{cn}^2\left(v \frac{K'}{n}; k'\right)}{\prod_{\mu=2,4,6,\dots}^{n-1} \operatorname{cn}^2\left(\mu \frac{K'}{n}; k'\right)} \end{aligned}$$

Ausgehend von der Transformationsfunktion nach Gleichung 153 kann eine weitere bekannte Formel für λ ermittelt werden. Sie bezieht Gleichung 154 für den Multiplikator M ein und stützt sich (genauso wie bei der ersten elliptischen Haupttransformation, vgl. 136) auf die vierte Potenz der Koeffizienten a_μ .

$$\begin{aligned} \lambda &= kM \prod_{\mu=2,4,6,\dots}^{n-1} \frac{1 + a_\mu^2}{1 + \frac{1}{k^2 a_\mu^2}} \\ &= kM \prod_{\mu=2,4,6,\dots}^{n-1} \left(k^2 a_\mu^4 \frac{1 + \frac{1}{a_\mu^2}}{1 + k^2 a_\mu^2} \right) \\ &= M^2 k^n \prod_{\mu=2,4,6,\dots}^{n-1} a_\mu^4 \tag{156} \\ &= M^2 k^n \prod_{\mu=2,4,6,\dots}^{n-1} \operatorname{sc}^4\left(\mu \frac{K'}{n}; k'\right) \end{aligned}$$

4.11 Zweite elliptische Haupttransformation, n gerade

Da hier genau die gleichen Bedingungen wie für den Fall ungerader Ordnung n gelten (vgl. Abbildung 18), sind die meisten Beziehungen ähnlich. Einziger Unterschied besteht generell darin, daß der Grad von Zähler- und Nennerpolynom entsprechend angepaßt werden muß.

4 Modultransformationen

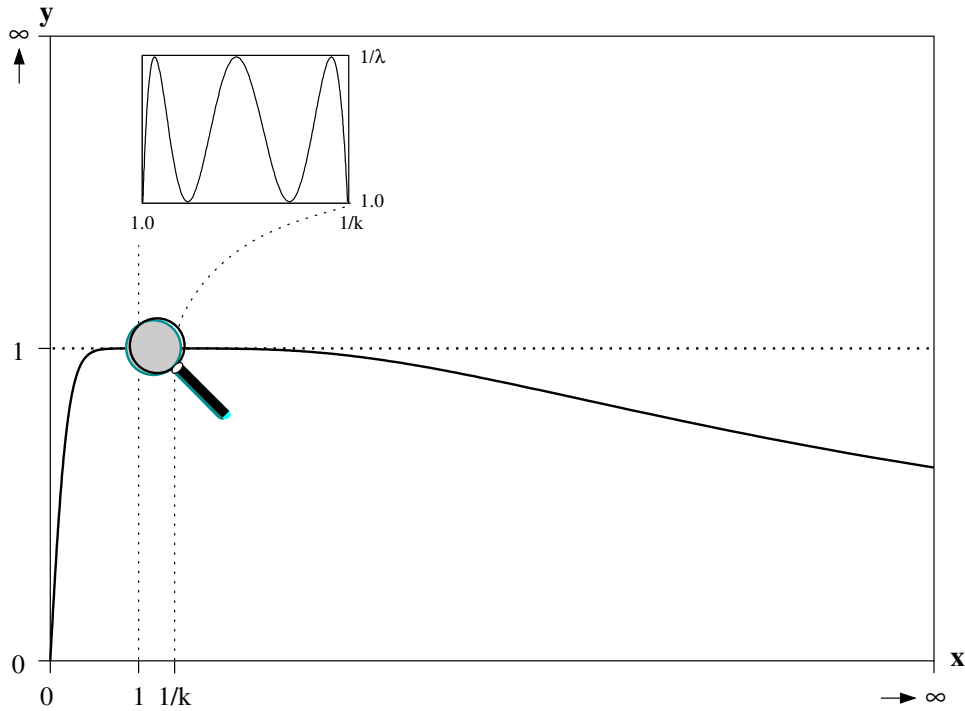


Abbildung 20: Zweite elliptische Haupttransformation für $n = 6$

$$y = \operatorname{sn}\left(\frac{u}{M}; \lambda\right) = \frac{x}{M} \cdot \frac{\prod_{\mu=2,4,6,\dots}^{n-2} \left(1 + \frac{x^2}{a_\mu^2}\right)}{\prod_{\nu=1,3,5,\dots}^{n-1} \left(1 + \frac{x^2}{a_\nu^2}\right)} \quad (157)$$

Der Grad des Nennerpolynoms ist n , der des Zählerpolynoms $n - 1$, was dazu führt, daß sich die Funktion für $x \rightarrow \infty$ der Nulllinie nähert. Dieses Verhalten ist auch im zugehörigen Funktionsverlauf nach Abbildung 20 gut zu erkennen.

Die Koeffizienten bestimmen sich genauso wie für den Fall ungerader Ordnung n , also wie in Formel 152, zu

$$x_{\mu} = ja_{\mu} = \operatorname{jsc}\left(\mu \frac{K'}{n}; k'\right), \quad \mu = 2, 4, 6, \dots, n - 2 .$$

Gleiches gilt für den Multiplikator M , für den ebenfalls nur der Grad von Zähler und Nenner in Gleichung 155 zu korrigieren ist.

5 Numerische Berechnungen

$$M = \frac{\prod_{\nu=1,3,5,\dots}^{n-1} \operatorname{sn}^2\left(\nu \frac{K'}{n}; k'\right)}{\prod_{\mu=2,4,6,\dots}^{n-2} \operatorname{sn}^2\left(\mu \frac{K'}{n}; k'\right)}$$

Anders beim Modul λ , welches (im Gegensatz zum Fall des ungeraden n) hier nicht durch Evaluation der rationalen Transformationsbeziehung an der Stelle $x = 1$ ermittelt werden kann. Wegen der jetzt geraden Ordnung n ist der Funktionswert dort nämlich 1 und nicht $1/\lambda$ (vgl. Abbildung 18). Der Wert $1/\lambda$ wird hingegen an den Extremstellen, d. h. bei $u_E = (2\nu + 1)K'/n$, $\nu \in \mathbb{Z}$ angenommen. Es ist also naheliegend einfach einen dieser Werte (x_E, y_E) in Beziehung 157 einzusetzen.

$$\frac{1}{\lambda} = \frac{x_E}{M} \cdot \frac{\prod_{\mu=2,4,6,\dots}^{n-2} 1 + \frac{x_E^2}{a_\mu^2}}{\prod_{\nu=1,3,5,\dots}^{n-1} 1 + \frac{x_E^2}{a_\nu^2}}$$

$$\lambda = \frac{\operatorname{nd}\left(\frac{K'}{n}; k'\right)}{M} \cdot \frac{\prod_{\mu=2,4,6,\dots}^{n-2} 1 + \frac{\operatorname{nd}^2(K'/n; k')}{\operatorname{sc}^2(\mu K'/n; k')}}{\prod_{\nu=1,3,5,\dots}^{n-1} 1 + \frac{\operatorname{nd}^2(K'/n; k')}{\operatorname{sc}^2(\nu K'/n; k')}}}$$

5 Numerische Berechnungen

5.1 Der AGM-Algorithmus

Der Algorithmus des Arithmetisch-Geometrischen Mittelwertes (AGM) stellt eine effiziente Möglichkeit zur numerischen Berechnung des elliptischen Integrals erster Art dar [Cay76, XIII], [Tri48, IV, § 7], [Hur00, II-7, § 6].⁵⁴ Er ist eine konsequente Anwendung der G -Transformation von Abschnitt 4.7.2 auf die elliptische Differentialgleichung 70 wie folgt:⁵⁵

$$\frac{1}{1+k} \cdot \frac{d\theta}{\sqrt{1-\lambda^2 \sin^2 \theta}} = \frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2 \sin^2 \varphi}}. \quad (158)$$

Aus der L -Form der elliptischen Differentialgleichung 70 kann man natürlich auch eine entsprechende G -sche Form ableiten. Dazu sollen zuerst die Darstellungsformen von

⁵⁴Sowohl C.F. Gauss als auch J. L. Lagrange haben sich im 18. Jahrhundert eingehend mit diesem Algorithmus beschäftigt.

⁵⁵Auf eine Indizierung der Größen mit “g” wie in Abschnitt 4.7.2 wird hier verzichtet.

5 Numerische Berechnungen

Formel 9, 6, 7 und 8 rekapituliert und auf die Ausdrücke der linken und rechten Seite von Gleichung 158 angewandt werden.

$$\begin{aligned}
 a_1 \frac{dt_1}{\sqrt{(t_1^2 + a_1^2)(t_1^2 + b_1^2)}} &= \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi}}, & t_1 &= b_1 \tan \varphi, & k' &= \frac{b_1}{a_1} \\
 a_0 \frac{dt_0}{\sqrt{(t_0^2 + a_0^2)(t_0^2 + b_0^2)}} &= \frac{d\theta}{\sqrt{1 - \lambda^2 \sin^2 \theta}}, & t_0 &= b_0 \tan \theta, & \lambda' &= \frac{b_0}{a_0}
 \end{aligned}$$

Mit dieser Indizierung schreibt sich Differentialgleichung 70 in der G -Form

$$\frac{dt_1}{\sqrt{(t_1^2 + a_1^2)(t_1^2 + b_1^2)}} = \frac{dt_0}{\sqrt{(t_0^2 + a_0^2)(t_0^2 + b_0^2)}}. \quad (159)$$

Bevor diese wichtige Relation nun bewiesen wird, sollen die Beziehungen zwischen den Modulen k und λ auf der Basis von a_v und b_v dargestellt werden.

$$k = \frac{1 - \lambda'}{1 + \lambda'} = \frac{a_0 - b_0}{a_0 + b_0} \quad (160)$$

Ersetzt man auch auf der linken Seite noch das Modul, so ergibt sich folgende Gleichung.

$$\begin{aligned}
 \sqrt{1 - \frac{b_1^2}{a_1^2}} &= \frac{a_0 - b_0}{a_0 + b_0} \\
 \frac{a_1^2 - b_1^2}{a_1^2} &= \frac{(a_0 - b_0)^2}{(a_0 + b_0)^2}
 \end{aligned}$$

Nach Erweiterung der rechten Seite wie folgt

$$\frac{a_1^2 - b_1^2}{a_1^2} = \frac{4(a_0 - b_0)^2}{4(a_0 + b_0)^2}$$

kann man (durch Vergleich von Zähler und Nenner) die Basisbeziehungen des AGM ableiten.

$$a_1 = \frac{a_0 + b_0}{2} = \frac{a_0}{2}(1 + \lambda') \quad (161)$$

$$a_1^2 - b_1^2 = \left(\frac{a_0 - b_0}{2}\right)^2$$

$$b_1^2 = \left(\frac{a_0 + b_0}{2}\right)^2 - \left(\frac{a_0 - b_0}{2}\right)^2 = a_0 b_0 \quad (162)$$

Mit diesen Voraussetzungen ist ein Beweis von Differentialgleichung 159 einfach zu erbringen.

5 Numerische Berechnungen

Beweis. Dazu geht man von der L 158'schen Form in Differentialgleichung 158 aus.

$$a_1 \frac{dt_1}{\sqrt{(t_1^2 + a_1^2)(t_1^2 + b_1^2)}} = \frac{a_0}{1+k} \cdot \frac{dt_0}{\sqrt{(t_0^2 + a_0^2)(t_0^2 + b_0^2)}}$$

Der "Multiplikator" $a_0/(1+k)$ in dieser Darstellung ist nun aber genau Eins, was Anwendung von Formel 161 schnell zeigt (wenn man außerdem das Modul k durch λ' ersetzt).

$$\begin{aligned} \frac{dt_1}{\sqrt{(t_1^2 + a_1^2)(t_1^2 + b_1^2)}} &= \frac{a_0}{a_1} \cdot \frac{1}{(1+k)} \cdot \frac{dt_0}{\sqrt{(t_0^2 + a_0^2)(t_0^2 + b_0^2)}} \\ &= \frac{a_0}{a_1} \cdot \frac{1+\lambda'}{2} \cdot \frac{dt_0}{\sqrt{(t_0^2 + a_0^2)(t_0^2 + b_0^2)}} \\ &= \frac{dt_0}{\sqrt{(t_0^2 + a_0^2)(t_0^2 + b_0^2)}} \end{aligned}$$

□

Was nun die Beziehung zwischen t_0 und t_1 angeht, so ist sie ja durch die trigonometrische Beziehung 119 der G 119-Transformation festgelegt.

$$\begin{aligned} t_0 &= b_0 \tan \theta \\ &= b_0(1+k) \tan \varphi \sqrt{\frac{1 + \tan^2 \varphi}{1 + k'^2 \tan^2 \varphi}} \\ &= b_0 \frac{2}{1+\lambda'} \cdot \frac{t_1}{b_1} \sqrt{\frac{1 + t_1^2/b_1^2}{1 + k'^2 t_1^2/b_1^2}} \\ &= \frac{2a_0 b_0}{a_0 + b_0} \cdot \frac{a_1 t_1}{b_1^2} \sqrt{\frac{b_1^2 + t_1^2}{a_1^2 + t_1^2}} \\ &= t_1 \sqrt{\frac{b_1^2 + t_1^2}{a_1^2 + t_1^2}} \end{aligned} \tag{163}$$

Zurück zum eigentlichen Algorithmus läßt sich nun die folgende Iteration durchführen,

5 Numerische Berechnungen

$$a_{i+1} = \frac{a_i + b_i}{2}, \quad b_{i+1} = \sqrt{a_i b_i} \quad (164)$$

wobei die Anfangswerte a_0 und b_0 nicht-negative Zahlen (mit $a_0 > b_0$) sein sollen. Dabei nähern sich für $i \rightarrow \infty$ beide Werte a_i und b_i einem gemeinsamen Grenzwert,⁵⁶ dem sogenannten AGM [Tod84].

$$M(a_0, b_0) = \lim_{i \rightarrow \infty} a_i = \lim_{i \rightarrow \infty} b_i \quad (165)$$

Um diesen Grenzwert zu finden, bildet man zuerst das unbestimmte elliptische Integral

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dt_i}{\sqrt{(t_i^2 + a_i^2)(t_i^2 + b_i^2)}} \quad (166)$$

und kombiniert es mit Relation 159.

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dt_i}{\sqrt{(t_i^2 + a_i^2)(t_i^2 + b_i^2)}} = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dt_{i+1}}{\sqrt{(t_{i+1}^2 + a_{i+1}^2)(t_{i+1}^2 + b_{i+1}^2)}}. \quad (167)$$

Die Beziehung zwischen den Integrationsgrenzen ist durch Gleichung 163 gegeben, d. h. wenn das Integrationsintervall auf der linken Seite von $-\infty$ nach $+\infty$ läuft, dann geschieht dasselbe auch auf der rechten Seite der Integralgleichung.

Nimmt man das rechtsseitige Integral als Ausgangspunkt für den nächsten Iterationsschritt,⁵⁷ so kann man unter Berücksichtigung von Formel 165 auch schreiben:

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dt_0}{\sqrt{(t_0^2 + a_0^2)(t_0^2 + b_0^2)}} &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dt_i}{\sqrt{(t_i^2 + a_i^2)(t_i^2 + b_i^2)}} = \dots \\ &= \lim_{i \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dt_i}{\sqrt{(t_i^2 + a_i^2)(t_i^2 + b_i^2)}} \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dt}{\sqrt{[t^2 + M^2(a_0, b_0)][t^2 + M^2(a_0, b_0)]}} \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dt}{t^2 + M^2(a_0, b_0)} \\ &= \frac{1}{M(a_0, b_0)} \arctan \frac{x}{M(a_0, b_0)} \Big|_{-\infty}^{\infty} = \frac{\pi}{M(a_0, b_0)}. \end{aligned}$$

⁵⁶Aus diesem Umstand kann man ein einfaches Abbruchkriterium ableiten.

⁵⁷Beziehungsweise interpretiert die Gleichung rückwärts bis hin zu a_0, b_0 .

5 Numerische Berechnungen

Bedenkt man weiterhin, daß der Integrand in Gleichung 166 eine gerade Funktion ist, kann folgende Integraldarstellung für $M(a_0, b_0)$ gegeben werden:

$$M(a_0, b_0) = \frac{\pi}{\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dt}{\sqrt{(t^2 + a_0^2)(t^2 + b_0^2)}}}. \quad (168)$$

5.2 Vollständiges Elliptisches Integral

Das Vollständige Elliptische Integral K kann ausgehend von Gleichung 168 ebenfalls mit Hilfe des AGM-Algorithmus' berechnet werden. Dazu wird Gleichung 168 als vollständiges elliptisches Integral erster Art $K(k)$ ausgedrückt, indem man wieder Formel 28 hinzuzieht.

$$M(a_0, b_0) = \frac{\pi}{2} \cdot \frac{1}{\int_0^{\infty} \frac{dt}{\sqrt{(t^2 + a_0^2)(t^2 + b_0^2)}}} = \frac{\pi}{2} \cdot \frac{a_0}{K\left(\sqrt{1 - \frac{b_0^2}{a_0^2}}\right)} \quad (169)$$

Umstellen nach K bedeutet:

$$K\left(\sqrt{1 - \frac{b_0^2}{a_0^2}}\right) = \frac{\pi}{2} \cdot \frac{a_0}{M(a_0, b_0)}.$$

Wählt man nun z. B. $a_0 = 1$, was die Voraussetzung $a_0 > b_0$ erfüllt und setzt $k = \sqrt{1 - b_0^2/a_0^2}$ als Argument, so gilt für $b_0 = \sqrt{1 - k^2} = k'$. Damit berechnet sich das Elliptische Integral erster Art zu:

$$K(k) = \frac{\pi}{2} \cdot \frac{1}{M(1, k')}, \quad (170)$$

was der zugehörige Algorithmus 1 widerspiegelt.

Für die Darstellung von K mit Hilfe des Modulwinkels ϕ , d. h. für $k = \sin \phi$, ist $b_0 = \cos \phi$ zu wählen.

$$K(\phi) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\alpha}{\sqrt{1 - \sin^2 \phi \sin^2 \alpha}}$$

Algorithmus 1 Numerische Berechnung von $K(k)$ mittels AGM

Require: $\varepsilon > 0$ {Abbruchkriterium}

Require: $k \leq 1$ {Modul}

$a_0 \leftarrow 1$

$b_0 \leftarrow k' \{k' = \sqrt{1-k^2}\}$

$i \leftarrow 0$

repeat

$a_{i+1} \leftarrow \frac{a_i + b_i}{2}$ {AGM}

$b_{i+1} \leftarrow \sqrt{a_i b_i}$

$i \leftarrow i + 1$

until $a_i - b_i < \varepsilon$

$K(k) \leftarrow \frac{\pi}{a_i + b_i}$

Jetzt soll noch kurz auf die Produktdarstellung für K eingegangen werden. Dazu benutzen wir Formel 94 aus Abschnitt 4.7.1 im Sinne von $\Lambda = K(k_{i+1})$, $K = K(k_i)$ und schreiben als reelle (Viertel-) Periodenbeziehung

$$K(k_i) = \frac{2}{1+k'_i} K(k_{i+1}), \quad k_{i+1} = \frac{1-k'_i}{1+k'_i} < k_i$$

mit dem Ausgangspunkt $K(k) = K(k_0)$. Bei einer unendlichen Anzahl von Iterationen wird k Null und wegen Gleichung 26 gilt:

$$K(k) = \lim_{N \rightarrow \infty} K(k_N) \prod_{i=0}^{N-1} \frac{2}{1+k'_i} = \lim_{N \rightarrow \infty} 2^N K(k_N) \prod_{i=0}^{N-1} (1+k'_i)^{-1} = \frac{\pi}{2} \prod_{i=0}^{\infty} \frac{2}{1+k'_i}.$$

Das heißt, die Zwischenwerte a_i und b_i eines *normalen* AGM könnten zur Berechnung des Produkts verwendet werden, wenn man die Beziehung $k'_i = b_i/a_i$ berücksichtigt.

5.3 Unvollständiges Elliptisches Integral

Der Berechnungsalgorithmus für $F(\varphi; k)$ basiert auf der iterativen Verringerung des Moduls k mit Hilfe der (aufsteigenden) Landau-Transformation von Abschnitt 4.7.1.⁵⁸ Dazu werden ausgehend von $\varphi_0 = \varphi$ und $k_0 = k$ die Formeln 108, 111 und 96 benutzt [Bul65], [HR63].

⁵⁸Bei gleichzeitiger Vergrößerung der Amplitude φ .

5 Numerische Berechnungen

$$F(\varphi_i; k_i) = \frac{1 + k_{i+1}}{2} F(\varphi_{i+1}; k_{i+1}) \quad (171)$$

$$\tan \varphi_{i+1} = \frac{(1 + k'_i) \tan \varphi_i}{1 - k'_i \tan^2 \varphi_i} \quad (172)$$

$$k_{i+1} = \frac{1 - k'_i}{1 + k'_i}$$

N -malige Anwendung der Gleichung 171 führt zu

$$F(\varphi; k) = 2^{-N} F(\varphi_N; k_N) \prod_{i=1}^N (1 + k_i). \quad (173)$$

Setzt man solange fort bis die Näherung $k_N \approx 0$ akzeptabel wird, dann kann der Spezialfall $F(\varphi; 0) = \varphi$ nach Formel 12 herangezogen werden

$$F(\varphi_N; k_N) \approx F(\varphi_N; 0) = \varphi_N.$$

Einsetzen in Gleichung 173 ergibt letztlich:

$$F(\varphi; k) = 2^{-N} \varphi_N \prod_{i=1}^N (1 + k_i).$$

Wegen der Periodizität des Tangens ist man vom Argument φ her zunächst auf das Intervall $[-\pi/2, +\pi/2]$ beschränkt. Hier kann man sich jedoch mit Reduktionsformel 15 helfen, wobei dann allerdings die Berechnung von $K(k)$ mit Hilfe des AGM unumgänglich wird.

Praktisch wird allerdings fast immer der AGM-Algorithmus (vgl. Abschnitt 5.1) in Verbindung mit Gleichung 7 implementiert, um das unvollständige elliptische Integral $F(\varphi; k)$ numerisch zu bestimmen. Dazu ist nur Gleichung 172 anzupassen,

$$\begin{aligned} \tan \varphi_{i+1} &= \frac{\left(1 + \frac{b_i}{a_i}\right) \tan \varphi_i}{1 - \frac{b_i}{a_i} \tan^2 \varphi_i} \\ &= \frac{(a_i + b_i) \tan \varphi_i}{a_i - b_i \tan^2 \varphi_i} \end{aligned}$$

denn die Modultransformation wird ja direkt durch das AGM realisiert.

In diesem Zusammenhang kommt für die Berechnung von φ_i auch häufig Gleichung 109 in der Form

5 Numerische Berechnungen

$$\begin{aligned}\tan(\varphi_{i+1} - \varphi_i) &= k'_i \tan \varphi_i \\ &= \frac{b_i}{a_i} \tan \varphi_i\end{aligned}$$

zur Anwendung.

5.4 Elliptischer Sinus

Wendet man die G - Transformation entsprechend Gleichung 113 zur Berechnung von $\operatorname{sn}(u; k) = \operatorname{sn}(u_0; k_0)$ in der Form

$$\operatorname{sn}(u_i; k_i) = \frac{(1 + k_{i+1})\operatorname{sn}(u_{i+1}; k_{i+1})}{1 + k_{i+1}\operatorname{sn}^2(u_{i+1}; k_{i+1})} \quad (174)$$

$$u_{i+1} = \frac{u_i}{1 + k_{i+1}}, \quad k_{i+1} = \frac{1 - k'_i}{1 + k'_i} < k_i \quad (175)$$

an (vgl. [Bul65], [HR63]), so führt dies für $k < 1$ letztlich zu einem Modul $\lim_{i \rightarrow \infty} k_i = 0$. Bricht man den Vorgang nach N Iterationen ab, so gilt:⁵⁹

$$u_N = \frac{u_0}{(1 + k_1)(1 + k_2) \cdots (1 + k_{N-1})(1 + k_N)} = u_0 \prod_{i=1}^N (1 + k_i)^{-1}.$$

Mit $k_N \approx 0$ kann man für $\operatorname{sn}(u_N; k_N)$ nun folgendermaßen nähern:⁶⁰

$$\operatorname{sn}(u_N; k_N) \approx \operatorname{sn}(u; 0) = \sin u.$$

Nach Ermittlung von u_N kann man durch inverse Interpretation ($i = N \dots 0$) der Abstiegsleichung 174 rückwärts $\operatorname{sn}(x_0; k_0) = \operatorname{sn}(x; k)$ berechnen.

$$\operatorname{sn}(u_{i-1}; k_{i-1}) = \frac{(1 + k_i)\operatorname{sn}(u_i; k_i)}{1 + k_i\operatorname{sn}^2(u_i; k_i)}$$

⁵⁹Effiziente Implementierungen greifen hier fast immer auf die Zwischenwerte des AGM (vgl. Abschnitt 5.1) zurück, um k_{i+1} nach Formel 160 zu bestimmen.

⁶⁰Nach [Pev92] ist der Fehler $|\operatorname{sn}(x_N; k_N) - \operatorname{sn}(x; 0)| < \frac{\pi}{4} k^2$.

5 Numerische Berechnungen

Das Modul k_i kann hierfür äquivalent zu Formel 102 in jedem Schritt rückwärts berechnet werden.⁶¹

$$k_i = 2 \frac{\sqrt{k_{i+1}}}{1 + k_{i+1}}$$

Nach [Pev92] ist der absolute Gesamtfehler des Verfahrens kleiner als $K(k) k_N^2/2$.

⁶¹Da die Werte k_i eigentlich schon von der absteigenden Iteration bekannt sind, kann auf die Neuberechnung verzichtet werden, wenn man den zusätzlich nötigen Speicherplatz akzeptiert.

Algorithmus 2 Numerische Berechnung von $x = \operatorname{sn}(u; k)$

Require: $\varepsilon > 0$ {Abbruchkriterium}**Require:** $k \leq 1$ {Modul} $x_0 \leftarrow x$ $k_0 \leftarrow k$ $a_0 \leftarrow 1$ $b_0 \leftarrow k'$ $i \leftarrow 0$ **while** $k_i > \varepsilon$ **do**

$$k_{i+1} \leftarrow \frac{a_i - b_i}{a_i + b_i}$$

if $k_{i+1} \geq k_i$ **then** {Konvergenzproblem?}**if** $k_{i+1} > 1/2$ **then** {Fall $k = 1$ } $x \leftarrow \tanh u$ **else** {Fall $k = 0$ } $x \leftarrow \sin u$ **end if****return****end if**

$$x_{i+1} \leftarrow \frac{x_i}{1 + k_{i+1}} \text{ {Gleichung 175}}$$

$$a_{i+1} \leftarrow \frac{a_i + b_i}{2} \text{ {AGM}}$$

$$b_{i+1} \leftarrow \sqrt{a_i b_i}$$

 $i \leftarrow i + 1$ **end while** $x_i \leftarrow \sin x_i \text{ {sn}(x_N; k_N) \approx \operatorname{sn}(x_N; 0) = \sin u_N}$ **repeat**

$$x_{i-1} \leftarrow \frac{(1 + k_i)x_i}{1 + k_i x_i^2} \text{ {Gleichung 174}}$$

 $i \leftarrow i - 1$ {Rückwärts-Rechnung}**until** $i = 0$ $x \leftarrow x_0$

6 SOLOTAREFF's drittes Problem

E. I. S hat sich in [Sol32] mit mehreren praktischen Problemen der gleichmäßigen bzw. T -Approximation auseinandergesetzt, von denen insbesondere das dritte Problem hier von Interesse sei.⁶² Es widmet sich der Suche nach einer gebrochen rationalen Funktion $f(x) = U(x)/V(x)$, welche im Intervall $|x| \leq \sqrt{k}$ am wenigsten von Null abweicht (mit $0 < k < 1$), dagegen für $|x| \geq 1/\sqrt{k}$ am stärksten von Null verschieden ist. Dabei sollen $U(x)$ und $V(x)$ algebraische Polynome der Form

$$U(x) = \sum_{v=0}^n c_v x^v = c_n x^n + \dots + c_2 x^2 + c_1 x + c_0 \quad (176)$$

$$V(x) = \sum_{\mu=0}^m d_\mu x^\mu = d_m x^m + \dots + d_2 x^2 + d_1 x + d_0$$

sein, deren Koeffizienten c_v und d_μ bzw. Nullstellen der Linearfaktordarstellung entsprechend der Zielvorgabe (für die Fehlerfunktion, vgl. Toleranzschema in Abbildung 21)

$$\left. \begin{array}{l} \max_{|x| \leq \sqrt{k}} f(x) \\ \max_{|x| \geq \frac{1}{\sqrt{k}}} \frac{1}{f(x)} \end{array} \right\} \Rightarrow \text{Min.} \quad (177)$$

bestimmt werden.

S hat nun aus Symmetrieeigenschaften sowie der Bedingung

$$f(x) f\left(\frac{1}{x}\right) = 1$$

die folgende Form von $f(x)$ geschlußfolgert [Tod84]:

$$f(x) \sim \prod \frac{b_v^2 - x^2}{1 - b_v^2 x^2} \quad (178)$$

Die Lösung dieser Approximationsaufgabe bzw. der nach 177 beruht auf J 'schen elliptischen Funktionen in Verbindung mit der ersten elliptischen Haupttransformation. Um den speziellen Intervallgrenzen in S 's drittem Problem Rechnung zu tragen, müssen die Achsen allerdings noch passend skaliert werden. Dazu setzt man in den rationalen Transformationsbeziehungen 140 und 125

⁶²Kurze Darstellungen sind auch in [Tod84], [Ach67, II] und [Ach70, § 50] sowie [Pil54] zu finden.

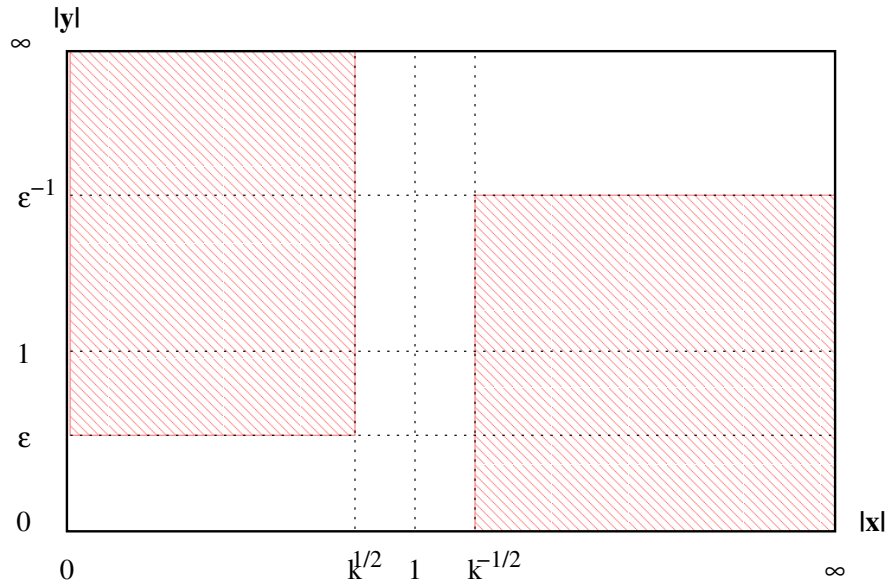


Abbildung 21: Toleranzschema für $|f(x)|$

$$x \Rightarrow \frac{x}{\sqrt{k}} \qquad y \Rightarrow \frac{f(x)}{\sqrt{\lambda}}$$

und erhält

$$f(x; k) = \begin{cases} \sqrt{\frac{\lambda}{k}} \cdot \frac{x}{M} \prod_{v=2,4,6,\dots}^{n-1} \frac{1 - \frac{x^2}{ka_v^2}}{1 - ka_v^2 x^2} & (n \text{ ungerade}) \\ \sqrt{\lambda} \prod_{v=1,3,5,\dots}^{n-1} \frac{1 - \frac{x^2}{ka_v^2}}{1 - ka_v^2 x^2} & (n \text{ gerade}) \end{cases}$$

bzw. nach den Parameterdarstellungen 124 und 139 der ersten elliptischen Haupttransformation:

$$x = \sqrt{k} \operatorname{sn}(u; k), \qquad f(x; k) = \sqrt{\lambda} \begin{cases} \operatorname{sn}(u/M; \lambda) & (n \text{ ungerade}) \\ \operatorname{cd}(u/M; \lambda) & (n \text{ gerade}) \end{cases}.$$

Die Verschiebung der ehemaligen Extremwerte $y = \pm 1$ und $y = \pm \lambda^{-1}$ hin zu $\pm \lambda^{1/2}$ und $\pm \lambda^{-1/2}$ entspricht dem Toleranzschema nach Abbildung 21, wenn man die Verläufe der ersten elliptischen Haupttransformation in den zugehörigen Abbildungen 15 und 17 betrachtet.

Passt man auch die Berechnungsformeln 138 und 146 für λ an, dann ist auch $\varepsilon = \sqrt{\lambda}$ leicht zu ermitteln.

$$\varepsilon = \begin{cases} \sqrt{k} \prod_{v=1,3,5,\dots}^{n-2} k \operatorname{sn}^2\left(v\frac{K}{n}; k\right) & (n \text{ ungerade}) \\ \prod_{v=1,3,5,\dots}^{n-1} k \operatorname{sn}^2\left(v\frac{K}{n}; k\right) & (n \text{ gerade}) \end{cases}$$

Berücksichtigt man für den Fall eines ungeraden n die Gleichung 136 und für gerades n entsprechend 146 in der Form

$$\frac{\lambda}{kM^2} = \prod_{v=2,4,6,\dots}^{n-1} (ka_v^2)^2 \quad (n \text{ ungerade})$$

$$\lambda = \prod_{v=1,3,5,\dots}^{n-1} (ka_v^2)^2 \quad (n \text{ gerade})$$

dann ergeben sich noch die folgenden Vereinfachungen:

$$f(x; k) = \begin{cases} (-1)^{\frac{n-1}{2}} x \prod_{v=2,4,6,\dots}^{n-1} \frac{ka_v^2 - x^2}{1 - ka_v^2 x^2} & (n \text{ ungerade}) \\ (-1)^{\frac{n}{2}} \prod_{v=1,3,5,\dots}^{n-1} \frac{ka_v^2 - x^2}{1 - ka_v^2 x^2} & (n \text{ gerade}) \end{cases} \quad (179)$$

Bezüglich des S 'schen Ausgangspunktes nach Beziehung 178 kann man nun die Unbestimmten b_v angeben.

$$b_v = \sqrt{k} a_v$$

Wegen der Skalierung der x-Achse verschieben sich natürlich auch alle Nullstellen und Pole nach den Formeln 128 und 127 (n ungerade) sowie 141 und 142 (n gerade).

$$x_{\circ v} = \sqrt{k} \operatorname{sn}\left(v\frac{K}{n}; k\right)$$

$$x_{\circ v} = \frac{1}{\sqrt{k} \operatorname{sn}\left(v\frac{K}{n}; k\right)} = \frac{1}{x_{\circ v}}$$

Die Berechnungsformeln 126 und 141 für die Koeffizienten a_v bleiben unverändert bei:

$$a_\nu = \operatorname{sn}\left(\nu \frac{K}{n}; k\right).$$

Sie repräsentieren letztlich das Ergebnis der Bestapproximation.

Beweis. Der Beweis der Bestapproximation beruht auf T 's Alternantensatz [Mei64, Satz 23], welcher angewandt auf die Ausgangspolynome 176 in kurzer Form lautet [Mei64, § 6]:

Die Funktion $f(x; k) = U(x)/V(x)$ stellt dann eine Minimallösung dar, wenn die absolute Fehlerfunktion

$$\varepsilon(x) = \begin{cases} f(x; k) & (|x| \leq \sqrt{k}) \\ \frac{1}{f(x; k)} & (|x| \geq \frac{1}{\sqrt{k}}) \end{cases}$$

im Approximationsintervall genau $m + n + 3$ Extremalpunkte hat,⁶³ an denen sie alternierend den Wert $\pm\varepsilon$ annimmt. Berücksichtigt man den Polynomgrad in Zähler und Nenner der Lösungsformel 179, dann gilt:

$$m = \begin{cases} n - 1 & (n \text{ ungerade}) \\ n & (n \text{ gerade}) \end{cases}.$$

Betrachtet man nun einfach die Funktionsverläufe der ersten elliptischen Haupttransformation in den Abbildungen 15 und 17, dann ist zu erkennen, daß $\varepsilon(x)$ genau $n + 1$ Alternantenpunkte im Intervall $0 \leq |x| \leq k^{1/2}$ und dazu noch einmal $m + 2$ solcher Punkte im Intervall $k^{-1/2} \leq |x| \leq \infty$ hat.

Aufgrund ihrer Anzahl sowie des alternierenden Fehlers $\pm\sqrt{\lambda}$ an den Stellen $x = \pm\operatorname{sn}(\nu K/n; k)$ ist die T 'sche Alternantenbedingung erfüllt und die Funktion $f(x; k)$ stellt folgerichtig eine Bestapproximation dar. \square

⁶³ $n + 1$ unbekannte Koeffizienten im Zähler und $m + 1$ im Nenner, d. h. die Dimension ist demzufolge $m + n + 2$, vgl. [Mei64, Satz 23].

Literatur

- [Ach67] A. Achutskii, N. I.: *Vorlesungen über Approximationstheorie*. Akademie-Verlag, Berlin, 2. Auflage, 1967.
- [Ach70] A. Achutskii, N. I.: *Elements of the Theory of Elliptic Functions*, Band 79 der Reihe *Translations of Mathematical Monographs; American Mathematical Society (AMS)*. Nauka, Moskau, 2. Auflage, 1970. Übersetzung (aus dem Russischen) H. H. McFaden, Editor B. Silver.
- [AS72] A. Abels, M. Abramowitz und I. Stegun (Herausgeber): *Handbook of Mathematical Functions*. Dover Publications, 9. Auflage, 1972.
- [Bul65] B. Bulst, R. Bulst: *Numerical calculation of elliptic integrals and elliptic functions*. Numerische Mathematik, 7:78–90, 1965.
- [BW91] B. Bolzano, C. W. Borchers und K. W. Borchers (Herausgeber): *C. G. J. Jacobi's gesammelte Werke*, Band 1–7. Verlag von G. Reimer, Berlin, 1881–91.
- [Cau54] C. Cauchoy, W. Cauchoy: *Theorie der linearen Wechselstromschaltungen*. Akademie-Verlag, Berlin, 2. Auflage, 1954.
- [Cay76] C. Cayley, A. Cayley: *An elementary treatise on elliptic functions*. Cambridge: Deighton, Bell, and Co., London, 1876.
- [HR63] H. H. McFaden, D. J. R. Bulst: *On the numerical calculation of elliptic integrals of the first and second kind and the elliptic functions of Jacobi*. Numerische Mathematik, 5:291–303, 1963.
- [Hur00] H. Hurwitz, A. Hurwitz: *Vorlesungen über allgemeine Funktionentheorie und elliptische Funktionen*. Springer, Berlin Heidelberg New York Barcelona Hongkong London Mailand Paris Singapur Tokio, 5. Auflage, 2000.
- [Jac29] J. Jacobi, C. G. J.: *Fundamenta nova theoriae functionum ellipticarum*. Bornträger, Königsberg, 1829.
- [JE52] J. Jacobi, E. Jacobi und F. Jacobi: *Tafeln höherer Funktionen*. B. G. Teubner Verlagsgesellschaft, Leipzig, 5. Auflage, 1952.
- [Koe74] K. Koenigsberger, L. Koenigsberger: *Vorlesungen über die Theorie der elliptischen Functionen nebst einer Einleitung in die allgemeine Functionlehre*, Band 1. B. G. Teubner Verlagsgesellschaft, Leipzig, 1874.
- [Leg28] L. Legendre, A. Legendre: *Traité des Fonctions Elliptiques et des intégrales eulériennes*, Band 1–3. Imprimerie de Huzard-Courcier, Paris, 1825–1828.
- [Mei64] M. Meissner, G. Meissner: *Approximation von Funktionen und ihre numerische Behandlung*. Springer, Berlin, 1964.
- [Pev92] P. Pevsner, A. B.: *Computation of Jacobi elliptic functions using Gauss transformation*. Computational Maths. and Math. Physics, 32(11):1671–1674, 1992.
- [Pil54] P. Pilch, H.: *Zolotareffsche rationale Funktionen*. - Zusammenfassender Bericht. Zentralblatt für angewandte Math. Mech., 34(4/5):175–189, 1954.

Literatur

- [Sol32] S , E. I.: *Die Anwendung elliptischer Funktionen auf das Problem der Funktionen, die am wenigsten von Null abweichen*. Comm. Soc. Math., 1932. (Russisch).
- [Tod84] T , J : *Applications of transformation theory: A legacy from Zolotarev (1847–1878)*. In: S , S. P. et al. (Herausgeber): *Approximation Theory and Spline Functions*, Nummer 136 in *NATO ASI Ser. C*, Seiten 207–245, St. John's/Newfoundland, 1984. NATO Adv. Study Inst., D. Reidel Publishing Company.
- [Tri48] T , F : *Elliptische Funktionen*. Akademische Verlagsgesellschaft Geest & Portig K.-G., Leipzig, 1948. (bearbeitet von M. Krafft).
- [Web91] W , H : *Elliptische Funktionen und algebraische Zahlen*. Friedr. Vieweg & Sohn, Braunschweig, 1891. (Akademische Vorlesungen).
- [WW27] W , E. T. und G. N. W : *A course of modern analysis*. Cambridge University Press, 4. Auflage, 1927. (Reprinted 1999).
- [Zve67] Z , A I.: *Handbook of Filter Synthesis*. John Wiley & Sons, 1967.

Index

A

- Additionstheoreme, 20
- Alternantenbedingung, 105
- Alternantensatz, 105
- Amplitudenfunktion, 15, 39
- Approximation
 - Alternantenbedingung, 105
 - gleichmäßige, 102
- Arithmetisch-Geometrischer Mittelwert (AGM), 92–96

E

- Elliptische Funktion, 15–32
 - Ableitung, 19, 20
 - Additionstheoreme, 20
 - Cosinus (Amplitudinis), 15
 - Definition, 15
 - Delta (Amplitudinis), 15
 - doppelte Argumente, 25
 - halbe Argumente, 25
 - imaginäre Argumente, 26
 - komplexe Argumente, 28
 - Nullstellen, 30
 - Perioden, 32, 41
 - Polstellen, 30
 - Sinus (Amplitudinis), 15, 40
 - spezielle Module, 17
 - spezielle Werte, 16
- Elliptisches Integral, 5
 - dritter Art, 5
 - erster Art, 5
 - unvollständiges, 6, 16, 97
 - vollständiges, 13, 96
 - zweiter Art, 5
- E -Theorem, 20

F

- Funktion
 - gebrochen rationale, 102

G

- G -Transformation, 57
- G -Funktion, 13

H

- Haupttransformation
 - erste elliptische
 - n gerade, 73
 - n ungerade, 61
 - zweite elliptische
 - n gerade, 90
 - n ungerade, 83

I

- Imaginäre Transformation, 12, 26, 46

J

- J
 - Elliptische Funktion nach, 15
 - imaginäre Transformation nach, 12, 26

L

- L -Transformation, 49

M

- Modul, 5, 34
 - Komplementäres, 5, 16
- Modulgleichung, 42, 47, 49, 51, 83
- Modultransformationen, 34–92
- Multiplikator, 34

P

- Periodengitter, 30, 41, 62
- Periodenverhältnis, 42, 47, 49, 60, 61, 83

Q

- Quadratische Transformation, 49

R

Reelle Transformation, 48

S

Schubert's drittes Problem, 102

T

Transformation

Goursat-, 57

imaginäre, 26, 46

Lagrange-, 49

quadratische, 49

reelle, 48

Transformationsfunktion, 42

algebraische, 36

elliptische, 39

erzeugende Differentialgleichung, 36

irrationale, 36

rationale, 36, 45

Transformationstheorie, 34

Tschirnhaus'sche Alternantenbedingung,
105

U

Unvollständiges elliptisches Integral, 6–13

Ableitung, 12

Goursat-Form, 7

imaginäre Argumente, 12

Jacobian-Form, 6

Lagrange'sche Normalform, 6

mit Modulwinkel, 8

Rosenhain'sche Normalform, 7

spezielle Module, 9

spezielle Werte, 8

V

Vollständiges elliptisches Integral, 13–15

Goursat-Form, 14

spezielle Werte, 14